Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat01pari

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

RÉDIGÉE PAR

M. B. NIEWENGLOWSKI,

DOCTEUR ÈS SCIENCES,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND

AVEC LA COLLABORATION DE MM.

N. CHARRUIT,
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU LYCÉE DE LYON

A. LAVIÉVILLE,
AGRÉGÉ DE PHYSIQUE,
PROFESSEUR AU LYCÉE CONDORCET

A. TARTINVILLE,
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

E. DESSENON,
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU LYCÉE SAINT-LOUIS

G. PAPELIER,
AGRÉGÉ DE MATHÉMATIQUES,
PROFESSEUR AU LYCÉE D'ORLÉANS

H. VUIBERT,
RÉDACTEUR DU
Journal de Mathématiques élémentaires.

Année 1

TOME PREMIER

Tot 1

ANNÉES 1890-91 & 1891-92

1 année 91-92 ... Supprimé

291721
9. 33
30

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, rue des Écoles, 17

GA
/
Page
Section 1

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1890.)

1. — *On donne dans un plan une hyperbole équilatère* H, *dont l'équation par rapport à ses axes pris pour axes de coordonnées est*

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

d'un point M *du plan ayant pour coordonnées* $x = p$, $y = q$, *on mène des normales à cette courbe. On demande :*

1° De faire passer par les pieds de ces normales une nouvelle hyperbole équilatère, dont les normales en ces points soient concourantes, et de déterminer leur point de concours ;

2° En désignant par K *une hyperbole équilatère satisfaisant à cette condition, dans quelle région du plan doit être placé le point* M *pour qu'il y ait une hyperbole* K *correspondant à ce point ;*

3° Quelle ligne doit décrire le point M *pour que l'hyperbole* K *soit égale à l'hyperbole* H.

Première partie. — L'hyperbole d'Apollonius relative au point (p, q) et à l'hyperbole donnée (H), a pour équation

$$2xy - qx - py = 0.$$

Une hyperbole (K) est représentée par une équation de la forme

$$x^2 - y^2 - a^2 + \lambda(2xy - qx - py) = 0.$$

L'hyperbole d'Apollonius correspondant à un point (α, β) et à l'hyperbole (K), est définie par l'équation

$$(1) \qquad (\alpha - x)[2y - 2\lambda x + \lambda p] + (\beta - y)[2x + 2\lambda y - \lambda q] = 0.$$

Pour satisfaire aux conditions de l'énoncé, il faut identifier cette équation avec une équation de la forme

$$(2) \qquad x^2 - y^2 - a^2 + \mu(2xy - qx - py) = 0.$$

ce qui donne
$$\frac{1}{\lambda} = -\mu = \frac{2q\mu}{2\lambda\alpha + \lambda p - 2\beta} = \frac{-2p\mu}{2\alpha + 2\lambda\beta + \lambda q} = \frac{-2a^2}{\lambda(p\alpha - q\beta)}.$$

D'où l'on tire :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mu = -\dfrac{1}{\lambda} \\ p\alpha - q\beta = -2a^2 \\ 2\lambda\alpha + \lambda p = 2(\beta - q) \\ 2\lambda\beta + \lambda q = -2(\alpha - p). \end{cases}$$

En éliminant λ entre les deux dernières équations, on obtient

$$2(\alpha^2 + \beta^2) - p\alpha - q\beta - p^2 - q^2 = 0$$

ou
$$\left(\alpha - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(\beta - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}(p^2 + q^2).$$

Le point de concours des normales à l'hyperbole (K), aux points où cette hyperbole rencontre l'hyperbole (H), est donc à l'intersection de la droite et du cercle représentés par les équations

$$px - qy + 2a^2 = 0,$$

$$\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}(p^2 + q^2)$$

et faciles à construire.

Deuxième partie. — Il y a, d'après ce que nous venons de dire, deux points P_1, P_2 répondant à la question; à chaque système de valeurs de (α, β) correspond une valeur de λ et par suite une hyperbole (K); il y a donc deux hyperboles (K_1), (K_2); pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que les points P_1, P_2 soient réels, et par suite que la droite P_1P_2 coupe le cercle défini par l'équation précédente. La condition de réalité s'obtient en écrivant que la distance du cercle à la droite est moindre que le rayon du cercle; on trouve ainsi

$$\left(\frac{p^2}{4} - \frac{q^2}{4} + 2a^2\right)^2 < \frac{9}{16}(p^2 + q^2)^2$$

ou

$$(2p^2 + q^2 + 4a^2)(p^2 + 2q^2 - 4a^2) > 0,$$

ce qui se réduit à

$$p^2 + 2q^2 - 4a^2 > 0.$$

Le point P doit donc se trouver à l'intérieur d'une ellipse ayant ses axes de symétrie confondus avec les axes coordonnés et représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{2a^2} - 1 = 0.$$

Si le point P est sur cette ellipse, les points P_1 et P_2 sont confondus; s'il est à l'extérieur de l'ellipse, P_1 et P_2 sont imaginaires.

Troisième partie. — L'équation en S relative à l'hyperbole (K) est

$$S^2 = 1 + \lambda^2.$$

D'ailleurs

$$\delta = -S^2, \qquad \Delta = a^2(1 + \lambda^2) + \frac{\lambda^3}{2}pq + \frac{\lambda^2}{4}(q^2 - p^2);$$

de sorte que l'*équation réduite* de l'hyperbole (K) est

$$X^2 - Y^2 - \frac{\Delta}{S^3} = 0.$$

La condition d'égalité des hyperboles (H) et (K) est donc

$$\Delta = a^2S^3,$$

en supposant la racine S convenablement choisie.

Posons $pq = v$, $q^2 - p^2 = u$; l'équation de condition précédente devient ainsi

$$4a^2S^2 + (S^2 - 1)u + 2\lambda(S^2 - 1)v = 4a^2S^3,$$

d'où l'on tire, en supprimant le facteur $S - 1$, (c'est-à-dire en supposant $\lambda \neq 0$),

$$(4) \qquad u + 2\lambda v = \frac{4a^2S^2}{S + 1}.$$

D'autre part, en éliminant 2α et 2β entre les équations (3), on obtient

$$(5) \qquad \lambda^3(4a^2 + u) - 6\lambda v + 4a^2 - 2u = 0.$$

(La condition de réalité des racines de cette équation se met facilement sous la forme

$$9(p^2 + q^2)^2 - (p^2 - q^2 + 8a^2)^2 > 0,$$

de sorte que l'on retrouve la condition obtenue plus haut.)

L'équation (5) peut s'écrire ainsi :

(6) $$4a^2S^2 - 6\lambda v + (S^2 - 3)u = 0.$$

En combinant les équations (4) et (6), on obtient (en supprimant S^2)

(7) $$4a^2 + u = \frac{12a^2}{S + 1}.$$

Les équations (4) et (7) donnent

$$2\lambda v - 4a^2 = \frac{4a^2}{S + 1}(S^2 - 3),$$

d'où $$2\lambda v = \frac{4a^2}{S + 1}(S - 1)(S + 2),$$

et par suite $$\lambda^2 v^2 = \frac{4a^4}{(S + 1)^2}(S - 1)^2(S + 2)^2;$$

en remplaçant λ^2 par $S^2 - 1$ et supprimant le facteur $S - 1$, on a

$$v^2(S + 1)^3 = 4a^4(S - 1)(S + 2)^2;$$

mais $$S + 1 = \frac{12a^2}{4a^2 + u}, \qquad S - 1 = \frac{4a^2 - 2u}{4a^2 + u}, \qquad S + 2 = \frac{16a^2 + u}{4a^2 + u}.$$

L'équation du lieu est donc

$$12^3.v^2a^6 = 8a^4(2a^2 - u)(16a^2 + u)^2,$$

c'est-à-dire, en remplaçant p par x, q par y, et par suite v par xy et u par $y^2 - x^2$,

(8) $$(2a^2 + x^2 - y^2)(16a^2 + y^2 - x^2)^2 - 6^3.a^2x^2y^2 = 0.$$

En développant cette équation et en y remplaçant $4x^2y^2$ par $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2$, on la met sous cette forme :

(9) $$(x^2 - y^2 + 8a^2)^3 = 2.3^3.a^2.(x^2 + y^2)^2.$$

Transformons en coordonnnées polaires, en posant

$$x = -\rho \sin \omega, \qquad y = \rho \cos \omega;$$

on a ainsi $$-\rho^2.\cos 2\omega + 8a^2 = 3\sqrt[3]{2a^2}.\rho^{\frac{4}{3}}.$$

Prenons comme inconnue auxiliaire $\rho^{-\frac{2}{3}}$, en posant $t = \rho^{-\frac{2}{3}}$; on a pour déterminer t l'équation

$$8a^2t^3 - 3t.\sqrt[3]{2a^2} - \cos 2\omega = 0.$$

Cette équation en t a ses trois racines réelles, en supposant l'angle ω réel; en la résolvant, on trouve immédiatement les trois solutions

$$t\sqrt[3]{2a^2} = \cos\frac{2\omega}{3}, \qquad t_1\sqrt[3]{2a^2} = \cos\frac{2\omega + 2\pi}{3}, \qquad t_2\sqrt[3]{2a^2} = \cos\frac{2\omega + 4\pi}{3}.$$

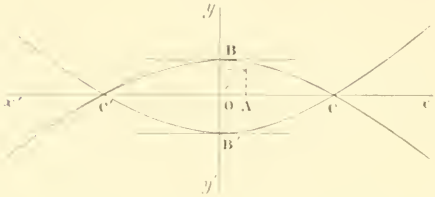
En prenant la première solution, on trouve

(10) $$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{\left(\cos\frac{2\omega}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

La courbe représentée par cette équation est facile à construire.

On aura toute la courbe en faisant varier ω de -3π à $+3\pi$; mais en changeant ω en $-\omega$, ρ ne change pas; donc OY, qui est l'axe polaire, est un axe de symétrie, de sorte qu'il suffit de faire varier ω de 0 à 3π. Mais si l'on pose $\omega = 3\pi - \omega'$, on trouve $\rho' = \rho$; OX est donc aussi un axe de symétrie

et il suffit de faire varier ω de 0 à $\frac{3\pi}{2}$. La courbe a des branches paraboliques ; dans l'intervalle de 0 à $\frac{3\pi}{2}$, ρ devient infini pour $\omega = \frac{3\pi}{4}$; d'ailleurs pour que ρ soit réel, il faut que ω soit compris entre 0 et $\frac{3\pi}{4}$; d'autre part, la formule



$$\frac{d\rho}{d\omega} = a\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\omega}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} . \sin\frac{2\omega}{3}$$

montre que ρ va en croissant quand ω croît de 0 à $\frac{3\pi}{4}$. Pour $\omega = 0$: $\rho = a\sqrt{2}$, $\frac{d\rho}{d\omega} = 0$, $\operatorname{tg} V = \infty$; pour $\omega = \frac{\pi}{2}$: $\rho = 4a$, $\frac{d\rho}{d\omega} = 4a\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} V = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Soient $OA = a$, $OB = a\sqrt{2}$, $OC = 4a$. En B, la tangente est parallèle à OX, en C elle fait avec OX un angle de 30°; la courbe a la forme représentée par la figure ci-contre.

Il reste à considérer les solutions correspondant à t_1 et t_2; on voit immédiatement que l'on retrouve la même courbe.

Enfin, nous avons supposé $S - 1 \neq 0$. Si l'on suppose $S = 1$, on en tire $\lambda = 0$; les équations (3) donnent, dans cette hypothèse, $\alpha = p$, $\beta = q$, et, par suite,

$$p^2 - q^2 + 2a^2 = 0.$$

Dans ce cas, la droite P_1P_2 passe par le point P, de sorte que l'un des points P_1 ou P_2 est confondu avec P; on obtient ainsi, outre la courbe du sixième degré trouvée plus haut, l'hyperbole équilatère représentée par l'équation

$$x^2 - y^2 + 2a^2 = 0$$

B. N.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Nous avons vu plus haut que les points P_1, P_2 sont à l'intersection d'une droite (D) ayant pour équation

$$qy - px = 2a^2$$

et d'un cercle (C) dont l'équation est

$$\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{q}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}(p^2 + q^2).$$

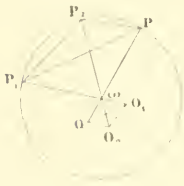


Fig. 1.

Le centre ω de (C) est sur OP; $O\omega = \frac{1}{4}$ OP et le rayon de (C) est les $\frac{3}{4}$ de OP.

La droite (D) est parallèle au diamètre conjugué de OP dans l'hyperbole (H), de sorte que l'angle de (D) avec Oy est égal à l'angle de OP avec Ox; de plus, la distance du point O à la droite (D) est égale à $\frac{2a^2}{\sqrt{p^2 + q^2}}$, ou $\frac{2a^2}{OP}$.

On forme facilement l'équation des droites PP_1, PP_2 en supposant pour un instant les axes transportés parallèlement à eux-mêmes, la nouvelle origine étant le point P. On trouve ainsi

$$y^2(2p^2 + q^2 + 4a^2) = x^2(p^2 + 2q^2 - 4a^2),$$

ce qui montre que les points P_1, P_2 seront réels si le point P est extérieur à l'ellipse ayant pour équation, par rapport aux axes primitifs,

$$x^2 + 2y^2 - 4a^2 = 0.$$

Cherchons maintenant à quelle condition une hyperbole (K) est égale à l'hyperbole donnée.

Si l'on se donnait le point P_1 et l'hyperbole (K_1), et si l'on se proposait le même problème, on devrait trouver évidemment les points P et P_2 et l'on aurait à considérer le même cercle (C). Il en résulte que les centres O_1, O_2 des hyperboles cherchées sont sur les droites $P_1\omega$, $P_2\omega$ à des distances de ω égales à $O\omega$ (le triangle OO_1O_2 est homothétique inverse du triangle PP_1P_2) *(fig. 1)*.

On a vu que la distance de O à la droite P_1P_2 est égale à $\frac{2a^2}{OP}$; comme $OP = O_1P_1 = O_2P_2$, on voit que les carrés des axes des hyperboles sont proportionnels aux distances de leurs centres aux côtés correspondants du triangle PP_1P_2. Pour que l'hyperbole (K_1) par exemple soit égale à l'hyperbole (H), *il suffit* que l'on ait $PP_2 = P_1P_2$. Soit α l'angle de OP avec Ox. Posons $OP = \rho$; on aura $\omega P = \frac{3}{4}\rho$. Abaissons ωK perpendiculaire sur P_1P_2 *(fig. 2)*; ωK rencontre le cercle en I. On voit aisément que l'angle $I\omega P$ est égal à $\pi - 2\alpha$, et comme I est le milieu de l'arc P_1P_2 qui est égal à l'arc PP_2, on a

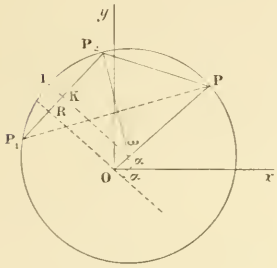


Fig. 2.

$$\widehat{P_2\omega I} = \frac{\pi - 2\alpha}{3}.$$

d'où

$$\omega K = \frac{3\rho}{4}\cos\frac{\pi - 2\alpha}{3}.$$

Abaissons OR perpendiculaire sur P_1P_2; on a

$$OR = \omega K + \frac{\rho}{4}\cos(\pi - 2\alpha)$$

ou

$$OR = \frac{3\rho}{4}\cos\frac{\pi - 2\alpha}{3} + \frac{\rho}{4}\cos(\pi - 2\alpha) = \rho\cos^3\frac{\pi - 2\alpha}{3}.$$

Si l'on prend OY pour axe polaire, en posant

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \omega,$$

ce qui donne $2\alpha - \pi = 2\omega$, et remarquant que $OR = \frac{2a^2}{\rho}$,

on obtient

$$\frac{2a^2}{\rho} = \rho\cos^3\frac{2\omega}{3}$$

ou enfin

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{\cos^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2\omega}{3}}$$

(E. Borel.)

Remarque. — Si le triangle PP_1P_2 est isoscèle, en supposant $PP_2 = P_1P_2$, la distance de O_1 à PP_2 est égale à la distance de O à P_1P_2 *(fig. 1)*; la réciproque n'est pas nécessaire.

Nos jeunes lecteurs pourront étudier complètement cette question.

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1890. — 1re session).

Épure.

INTERSECTION DE DEUX CÔNES

2. — *Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 235mm du petit côté supérieur.*

Les bases des cônes sont des cercles dont les rayons sont égaux à 80mm et dont les plans sont perpendiculaires à la droite (ab, a'b') *qui joint leurs centres* (a, a') *et* (b, b').

La ligne de rappel aa' *est à 120mm du grand côté gauche du cadre, et la ligne de rappel* bb' *à 145mm du même grand côté. La cote et l'éloignement du point* (a, a') *sont égaux à 80mm; la cote du point* (b, b') *est de 145mm et son éloignement de 105mm.*

On prend les diamètres horizontaux des cercles de base, on joint les extrémités de ces diamètres voisines du grand côté gauche du cadre et, sur la droite ainsi obtenue, on prend le point dont la cote est égale à 248mm; c'est le sommet du cône qui a pour base le cercle (aa'). *On joint les secondes extrémités des diamètres horizontaux des cercles de base, et, sur la droite ainsi obtenue, on prend le point dont la cote est égale à 3mm; c'est le sommet du cône qui a pour base le cercle* (bb').

On demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble des deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base.

On indiquera à l'encre rouge *les constructions employées pour placer les données et pour déterminer :*

1° *Un point* quelconque *de chacune des bases et les tangentes en ces points ;*

2° *Un point* quelconque *de la trace de chaque cône sur le plan de base de l'autre et les tangentes en ces points;*

3° *Un point* quelconque *de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point ;*

4° *Les génératrices de contour apparent des deux cônes et les points des bases, des traces sur les plans de base et de l'intersection, situés sur ces génératrices.*

On n'indiquera pas d'autre construction.

Une légende sur une feuille à part fera connaître succinctement le procédé suivi pour chacune des déterminations précédentes.

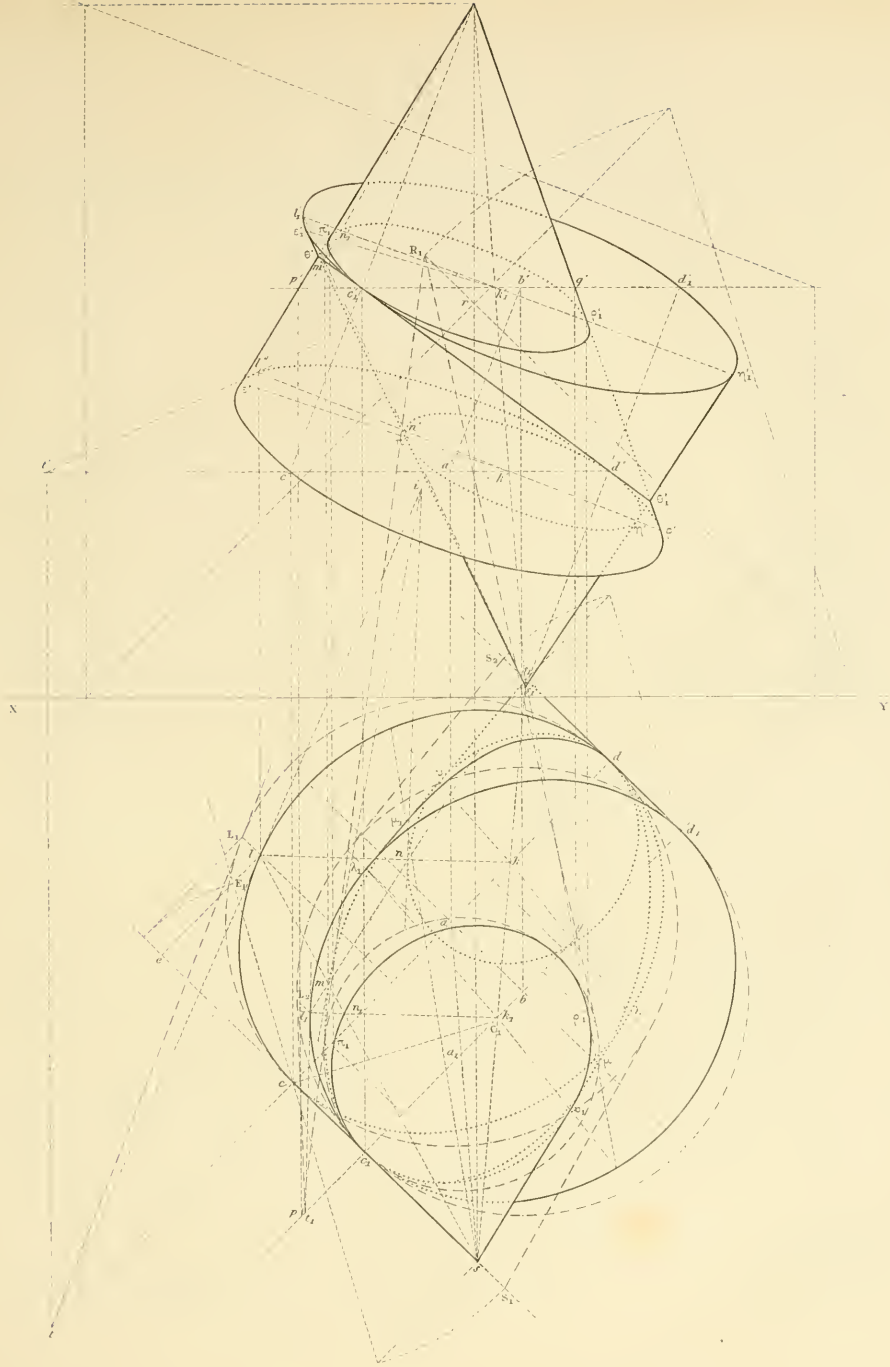
Titre extérieur. INTERSECTION DE DEUX CÔNES. *Ce titre, en lettres dessinées, est de rigueur.*

1° Les diamètres horizontaux des deux cercles se projettent horizontalement en vraie grandeur suivant les perpendiculaires cd, c_1d_1 à ab. En joignant alors les points (c, c') et (c_1, c'_1) et prenant sur la droite de jonction le point dont la cote est 248mm, on a le sommet (s, s') du cône ayant pour base le cercle de centre (a, a'); de même, le sommet du second cône est (s_1, s'_1).

La base du premier cône se rabat autour de l'horizontale $(cd, c'd')$ suivant un cercle de diamètre cd; pour relever un point L_1 de ce cercle et la tangente correspondante, on s'est servi de la droite du plan perpendiculaire en (a, a') à $(ab, a'b')$, projetée suivant cc_1 et dont le rabattement sur le plan horizontal mené par (c, c') est cE_1.

2° Le plan mené par le point (l, l') et la droite $(ss_1, s's'_1)$ coupe les bases des deux cônes suivant les parallèles $(lk, l'k')$ et $(l_1k_1, l'_1k'_1)$.

La génératrice $(sl, s'l')$ détermine sur la droite $(l_1k_1, l'k'_1)$ un point (n_1, n'_1) de la trace du premier cône sur la base du second cône; la génératrice $(s_1l_1, s'_1l'_1)$ fournit de même le point analogue (n, n'). Les tangentes en ces points sont évidemment parallèles à celles des points correspondants des bases.


X
Y

3° Le point (m, m'), commun aux génératrices $(sl, s'l')$ et $(s_1l_1, s'_1l'_1)$, est un point de l'intersection des deux cônes. D'après la projection verticale, cette intersection peut être regardée comme plane. On détermine la tangente en m à la projection horizontale en joignant m au point d'intersection i des tangentes en (l, l') et (n, n') aux deux cônes situées dans le plan de base du premier cône, ce point appartenant en effet aux plans tangents aux cônes menés au point (m, m').

4° Pour le cône de sommet (s, s') par exemple, les génératrices de contour apparent horizontal sont les projections horizontales des tangentes au cercle de base menées par le point de rencontre de son plan avec la verticale de s, point rabattu sur le plan horizontal en S_1. En relevant, on a les génératrices cherchées, sc et $s\lambda$.

Le contour apparent vertical s'obtiendrait de même en cherchant les projections verticales des tangentes à la base issues du point où cette base est rencontrée par la droite debout de s'; mais ce point tombant ici en dehors des limites de l'épure, on a tourné la difficulté en prenant pour directrice du cône, sa trace sur le plan du second cône, dont le rabattement est un cercle de centre a_1 et de rayon a_1c_1. Dans ces conditions, l'horizontale du plan du cercle qui s'appuie sur la droite debout de s' rencontre cette droite au point (r, s'), rabattu en R_1; il ne reste plus qu'à relever les tangentes R_1p et R_1q au cercle a_1, ce qui fournit, en projection verticale, les génératrices $s'p'$, $s'q'$, tangentes en π'_1, ρ'_1 à la projection verticale du cercle a_1.

Si l'on applique alors la construction générale indiquée plus haut (2° et 3°) aux points λ et λ_1 de la projection horizontale, on en déduit les points ν_1, μ et ν, μ_1; en projection verticale, cette construction, appliquée aux points π'_1 et ρ'_1, fournit les points ε', θ, et η', θ'_1; les points θ' et θ'_1 limitant évidemment l'intersection verticale des deux cônes, les droites $s'_1\theta'$ et $s'_1\theta'_1$ peuvent être considérées comme déterminant le contour apparent vertical du second cône.

L. Messent.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (Concours de 1890).

Mathématiques spéciales.

3. — *On donne un triangle* ABC *et un point* P *dans son plan.*

1° Trouver le lieu des centres des coniques S *inscrites dans le triangle* ABC *et qui sont vues du point* P *sous un angle donné* ω.

2° Discuter ce lieu en supposant que le point P *se déplace dans le plan du triangle.*

3° Démontrer que, si l'angle donné ω *est droit, toutes les coniques* S *sont aussi vues sous un angle droit d'un autre point* P'. *Montrer que, dans ce cas, si le point* P *se déplace, la droite* PP' *passe par un point fixe* I, *et que le produit* IP.IP' *est constant.*

Prenons pour triangle de référence le triangle ABC; désignons par a, b, c ses côtés, et par A, B, C ses angles. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées trilinéaires du point P, entre lesquelles on a la relation

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = 2S.$$

S désigne la surface du triangle ABC.

L'équation tangentielle la plus générale des coniques inscrites dans le triangle ABC est

$$(1) \qquad pvw + qwu + ruv = 0.$$

L'ensemble des tangentes à une des coniques de ce réseau, issues du point P, a pour équation
$2py_0z_0x^2+2qz_0x_0y^2+2rx_0y_0z^2+2(px_0-qy_0-rz_0)x_0yz+2(-px_0+qy_0-rz_0)y_0zx+2(-px_0-qy_0+rz_0)z_0xy=0.$

L'angle ω de ces deux droites est donné par la formule connue :

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}^2\omega = \frac{-\Delta}{R^2.E^2},$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} E &= 2[py_0z_0 + qz_0x_0 + rx_0y_0 - (px_0 - qy_0 - rz_0)x_0\cos A - (-px_0 + qy_0 - rz_0)y_0\cos B \\ &\qquad - (-px_0 - qy_0 + rz_0)z_0\cos C] \\ &= 2\left[\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right)(ay_0z_0 + bz_0x_0 + cx_0y_0) - (ax_0 + by_0 + cz_0)\left(\frac{px_0\cos A}{a} + \frac{qy_0\cos B}{b} + \frac{rz_0\cos C}{c}\right)\right] \end{aligned}$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2py_0z_0 & z_0(-px_0-qy_0+rz_0) & y_0(-px_0+qy_0-rz_0) \\ b & z_0(-px_0-qy_0+rz_0) & 2qz_0x_0 & x_0(px_0-qy_0-rz_0) \\ c & y_0(-px_0+qy_0-rz_0) & x_0(+px_0-qy_0-rz_0) & 2rx_0y_0 \\ 0 & a & b & c \end{vmatrix} = -(ax_0+by_0+cz_0)^2\varphi_0.$$

φ_0 désigne le premier membre de l'équation ponctuelle de la conique S, quand on y remplace les coordonnées courantes x, y, z par x_0, y_0, z_0 :

$$\varphi_0 = (px_0 + qy_0 + rz_0)^2 - 4(pqx_0y_0 + qry_0z_0 + rpz_0x_0).$$

Enfin, R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le centre de la conique S est le pôle de la droite de l'infini

$$2S = ax + by + cz = 0.$$

Les coordonnées x, y, z satisfont donc aux équations

$$\frac{p(px - qy - rz)}{a} = \frac{q(-px + qy - rz)}{b} = \frac{r(-px - qy + rz)}{c}.$$

On tire de là
$$\frac{p}{a(S - ax)} = \frac{q}{b(S - by)} = \frac{r}{c(S - cz)}.$$

Remplaçant p, q, r par les quantités proportionnelles

$$a(S - ax), \qquad b(S - by), \qquad c(S - cz)$$

et 2S par $ax + by + cz$, dans l'équation (2), on aura l'équation du lieu des centres des coniques S.

Comme E est linéaire en p, q, r et que φ_0 est du second degré par rapport à ces mêmes coefficients, on voit que le lieu cherché est une courbe du second degré, à moins toutefois que l'angle ω ne soit droit. Nous reviendrons plus loin sur ce cas particulier.

2° Pour reconnaître le genre de la conique lieu des centres, nous étudierons la nature de ses points d'intersection avec la droite de l'infini.

Ces points sont les mêmes que ceux que l'on obtient en considérant la conique déduite de la précédente, en y faisant $S = 0$; cela revient à remplacer p, q, r par a^2x, b^2y, c^2z, ce qui donne

$$\operatorname{tg}^2\omega = \frac{(a^2xx_0 + b^2yy_0 + c^2zz_0)^2 - 4(a^2xx_0.b^2yy_0 + b^2yy_0.c^2zz_0 + c^2zz_0.a^2xx_0)}{4R^2(axx_0\cos A + byy_0\cos B + czz_0\cos C)^2}.$$

Formons l'équation quadratique du faisceau de droites joignant le point C ($x = 0$, $y = 0$) aux points d'intersection de cette conique avec la droite de l'infini. Il faut, pour cela, éliminer z entre l'équation précédente et l'équation

$$ax + by + cz = 0.$$

On a ainsi $$4R^2 \operatorname{tg}^2\omega[ax(x_0 \cos A - z_0 \cos C) + by(y_0 \cos B - z_0 \cos C)]^2$$
$$- [(ax(ax_0 + cz_0) + by(by_0 + cz_0))^2 - 4a^2b^2xyx_0y_0] = 0.$$

La condition de réalité de ces deux droites est $V > 0$, en posant

$$V = R^2 \sin^2 \omega(ay_0z_0 + bz_0x_0 + cx_0y_0)^2 - abcx_0y_0z_0(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

La courbe qui a pour équation $V = 0$, c'est-à-dire

$$R^2 \sin^2 \omega(ayz + bzx + cxy)^2 - abcxyz(ax + by + cz) = 0,$$

sépare les points P du plan pour lesquels on a des ellipses de ceux pour lesquels on a des hyperboles.

La courbe $V = 0$ est une quartique trinodale, dont les trois points doubles sont les trois sommets du triangle de référence; elle est donc unicursale.

Pour la construire et l'étudier, on peut se servir de la transformation suivante, connue sous le nom de transformation inverse :

A un point $M(x, y, z)$ du plan, faisons correspondre un point $M'(x', y', z')$ déterminé par les relations

$$xx' = yy' = zz'.$$

Réciproquement, au point M′ correspondra le point M.

Des formules précédentes, on tire

$$\frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'}$$

et

$$\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy}.$$

Pour construire le point M′, il suffit d'observer que les droites AM, AM′; BM, BM′; CM, CM′ sont symétriques respectivement par rapport aux bissectrices des angles A, B, C du triangle.

Si le point M décrit la courbe $V = 0$, le point M′ décrira la courbe

$$V' = R^2 \sin^2 \omega(ax' + by' + cz')^2 - abc(ay'z' + bz'x' + cx'y') = 0.$$

C'est un cercle concentrique au cercle circonscrit au triangle ABC. Son rayon $R' = R \cos \omega$, est toujours inférieur à R.

Ce cercle peut donc se construire connaissant ω, et ayant construit ce cercle, on en déduira la forme de la quartique, d'après la construction indiquée.

A tous les points de BC, correspond le point A; donc, pour que le point A soit point double à tangentes réelles de V, il faut que le cercle V′ rencontre BC en deux points réels. Les tangentes en A seront les symétriques, par rapport à la bissectrice de l'angle A, des droites joignant le point A aux points de rencontre du cercle V′ avec BC.

Si le cercle est tangent à BC, A est un point de rebroussement; enfin, si le cercle ne rencontre pas BC, A est un point isolé.

Il sera donc facile, d'après cela, de se rendre compte de la forme de la courbe V quand R′ variera de 0 à R. Ci-contre les figures correspondantes.

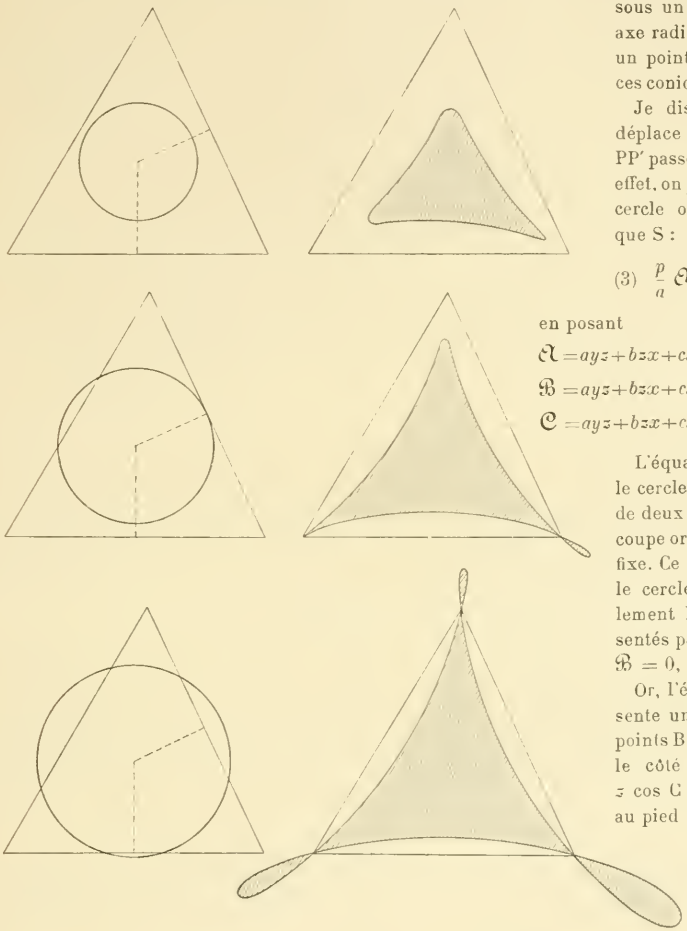
On pourrait imaginer d'autres cas, par exemple ceux où le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle; cela ne présente pas plus de difficultés.

Pour que la conique, lieu des centres, soit une ellipse, il faut que le point P se trouve dans la région ombrée.

3° Dans le cas où l'angle ω est droit, les coefficients p, q, r de la conique S sont assujettis à vérifier la relation $E = 0$.

Or, si l'on regarde x_0, y_0, z_0 comme des coordonnées courantes, on voit que l'équation $E = 0$ représente le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique S. En exprimant que

ce cercle passe par le point P, on a une relation linéaire entre ses coefficients. Son équation ne dépend plus dès lors linéairement que d'un seul paramètre. Par suite, les cercles orthoptiques de toutes les coniques S vues du point P sous un angle droit, ont même axe radical et se coupent tous en un point P′ d'où l'on voit aussi ces coniques sous un angle droit.



Je dis que si le point P se déplace dans le plan, la droite PP′ passe par un point fixe I. En effet, on peut écrire l'équation du cercle orthoptique de la conique S :

$$(3)\quad \frac{p}{a}\,\mathfrak{A} + \frac{q}{b}\,\mathfrak{B} + \frac{r}{c}\,\mathfrak{C} = 0,$$

en posant

$$\mathfrak{A} = ayz + bzx + cxy - x\cos A(ax + by + cz),$$
$$\mathfrak{B} = ayz + bzx + cxy - y\cos B(ax + by + cz),$$
$$\mathfrak{C} = ayz + bzx + cxy - z\cos C(ax + by + cz).$$

L'équation (3) nous montre que le cercle dépendant linéairement de deux paramètres arbitraires, coupe orthogonalement un cercle fixe. Ce cercle fixe est d'ailleurs le cercle qui coupe orthogonalement les trois cercles représentés par les équations $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$.

Or, l'équation $\mathfrak{A} = 0$ représente un cercle passant par les points B et C, et coupant en outre le côté AC au point $y = 0$, $z \cos C = x \cos A$, c'est-à-dire au pied de la hauteur issue du point B.

Les cercles $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ sont donc les cercles décrits sur les trois côtés du triangle de référence comme diamètres. Leur centre radical est le point de concours I des hauteurs de ce triangle. De plus, le cercle qui les coupe orthogonalement est le cercle de centre I conjugué au triangle ABC. Il en résulte que ce cercle coupe orthogonalement tous les cercles orthoptiques des coniques S, et que, pour chaque position du point P, les axes radicaux des cercles orthoptiques correspondants, c'est-à-dire les droites PP′, vont passer par le point I. De plus, si l'on désigne par ρ le rayon du cercle conjugué au triangle ABC, on a $IP.IP' = \rho^2$.

Remarques. — I. Dans le cas où l'angle ω est droit, le lieu des centres des coniques S se réduit à une ligne droite. C'était presque évident, car la condition $E = 0$ établissant une relation linéaire entre p, q, r, les coniques S sont dès lors inscrites dans un quadrilatère.

II. — On pouvait prévoir géométriquement l'existence du point P′ quand l'angle ω est droit. En effet, les tangentes issues du point P aux coniques S forment en ce cas deux faisceaux en involution. Par conséquent, d'après une réciproque du théorème de Plücker, les coniques S sont inscrites dans un quadrilatère. Si l'on considère deux de ces coniques, leurs cercles orthoptiques qui passent par le point P se coupent en un point P′. Les tangentes menées de ce point aux coniques inscrites dans le quadrilatère forment deux faisceaux en involution. Comme deux couples de rayons homologues de ces faisceaux sont rectangulaires, tous les autres couples le seront aussi. Par suite, le point P′ est aussi un point commun aux cercles orthoptiques des coniques S vues du point P sous un angle droit.

Pour une position donnée du point P, les coniques S sont tangentes aux trois côtés du triangle ABC et à une quatrième droite D. La droite PP′ est l'axe radical commun aux trois cercles décrits sur les trois diagonales de ce quadrilatère comme diamètres. Elle passe donc par les points de concours des hauteurs des quatre triangles formés avec trois des quatre droites AB, BC, CA et D, et, en particulier, par le point I, centre des hauteurs du triangle ABC. De plus, le produit IP.IP′ est constant et égal, d'après une propriété élémentaire bien connue, au carré du rayon du cercle conjugué au triangle ABC.

A. Maluski.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École normale supérieure (1890).

Questions de M. J. Tannery.

1. — On coupe un hyperboloïde à une nappe par des plans passant par un point fixe et par une génératrice rectiligne variable. Lieu des centres de ces sections.

2. — Construire la courbe $x^3 + y^3 = a^3$. — Points de contact des tangentes issues du point (α, β). — Équation aux y de ces points de contact. — Que faut-il faire pour avoir les x? — Ne peut-on pas avoir x par une relation du premier degré en x? — Qu'arrive-t-il pour l'équation aux y quand le point (α, β) est situé sur la courbe? — Il n'y a plus alors que quatre tangentes issues du point: équation des coniques passant par leurs points de contact?

3. — Distance d'un point (x, y, z) à une droite dans l'espace. — Si l'on considère x, y, z comme variables, que représente l'équation obtenue entre x, y, z et la distance d?

4. — Discuter la surface $\lambda(zx - 1) + \mu z - xy) + \nu(y - z^2) = 0$. Trouver ses génératrices rectilignes.

5. — Intersection de deux surfaces du second degré ayant une génératrice commune. — Y a-t-il un autre cas dans lequel la courbe d'intersection est unicursale? — Montrer que ce cas est celui où les deux surfaces sont tangentes en un point.

6. — Construire la courbe $(x^2 + y^2 - 2x)(x + y - 2) = (x^2 + y^2 - 2y)(x - y)$.

7. — Lieu des milieux des cordes d'une surface qui passent par un point fixe.

8. — On donne une cubique gauche définie par $x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}$, $y = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)}$, $z = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)}$. Trouver les branches infinies. — Asymptotes; peuvent-elles être rectangulaires? — En supposant qu'elles le soient, quelle forme prendraient les expressions des coordonnées si l'on prenait les axes parallèles aux asymptotes?

A chaque valeur de t correspond un point de la courbe. Condition pour que la droite (t_1, t_2) soit perpendiculaire à la droite (t_3, t_4). — Cette condition ne présente-t-elle rien de remarquable relativement à la manière dont y entrent t_1, t_2,

t_3, t_4? — En déduire une propriété géométrique du tétraèdre ayant pour sommets les points t_1, t_2, t_3, t_4 (il est orthocentrique). — Projection de la courbe sur une des faces de ce tétraèdre

9. — Génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique. — Une génératrice d'un système peut-elle être perpendiculaire à toutes les génératrices de l'autre système? — Condition pour qu'on puisse trouver une génératrice jouissant de cette propriété.

10. — Chercher les plans qui coupent partout à angle droit la surface $f(x, y, z) = 0$.

11. — Étant donnés deux points, il y a une infinité de coniques conjuguées par rapport à ces deux points. Y en a-t-il qui puissent se réduire à une droite double?

12. — Appliquer la formule de Taylor à $\sin x$; déduire de ce développement la formule

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x.$$

13. — On donne trois couples de points A_1, A'_1; A_2, A'_2; A_3, A'_3. On demande de trouver un cercle tel que les deux points de chaque couple soient conjugués par rapport à ce cercle. — Dans quel cas le problème sera-t-il indéterminé? — Que représente géométriquement la condition pour que le problème soit indéterminé? — Démontrer que, dans ce cas, les trois cercles décrits sur $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ comme diamètres ont même axe radical et que, réciproquement, si cette condition est remplie, le problème est indéterminé.

14. — On donne trois cercles $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$; que représente l'équation

$$\lambda_1 C + \lambda_2 C' + \lambda_3 C'' = 0\,?$$

15. — On donne une forme quadratique f à trois variables et une forme linéaire P à trois variables. Peut-on mettre f sous la forme $kP^2 + QR$? Quelles sont les conditions pour que cette transformation soit possible? Valeurs de k

16. — Résoudre le système $\qquad x^3 - 3xy^2 + 2 = 0, \qquad 3x^2y - y^3 - 2 = 0.$

17. — a et b étant entiers, trouver le plus grand commun diviseur de $x^a - 1$ et $x^b - 1$.

18. — Je suppose qu'on ait

$$A^2 = x^2 + y^2 - 2ax + a^2,$$
$$B^2 = x^2 + y^2 - 2bx + b^2,$$
$$C^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2.$$

Peut-on éliminer x et y entre ces relations? — Si x et y représentent les coordonnées d'un point, que représentent A, B, C? — La relation obtenue en éliminant x et y n'est-elle pas connue? — Supposons, au contraire, que A, B, C soient les coordonnées d'un point dans l'espace; montrer que la relation obtenue représente une surface. — Trouver les équations d'une génératrice rectiligne de cette surface. — En regardant de nouveau A, B, C comme les distances du point (x, y) aux points $(a, 0)$; $(b, 0)$; $(c, 0)$, que représentent les équations de la génératrice?

19. — Peut-il y avoir entre x et $\sin x$ une relation algébrique entière vérifiée quel que soit x?

20. — Limite de $\dfrac{e^x}{x^m}$ quand x augmente indéfiniment.

21. — On donne $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$. Plan tangent à la surface au point (u, v). Ne pourrait-on pas obtenir son équation en prenant deux courbes quelconques sur la surface?

22. — On donne les équations de deux coniques dans le plan et les coordonnées d'un point (x', y'). Équation aux coefficients angulaires des droites joignant le point aux points d'intersection des deux coniques. Désignant par t ces coefficients angulaires, on aura une relation $z(x', y', t) = 0$. Que représente-t-elle quand on y suppose t constant, x' et y' variables? Qu'obtiendrait-on en écrivant que cette équation en t a deux racines égales? qu'elle a deux racines de produit -1?

23. — On considère la courbe $x = \dfrac{A}{a + t}$, $y = \dfrac{B}{b + t}$, $z = \dfrac{C}{c + t}$.

Un plan la coupe en trois points t_1, t_2, t_3. Déterminer le plan de manière que les droites qui joignent le point $t = u$ aux points t_1, t_2, t_3 soient rectangulaires. — Qu'y a-t-il à remarquer sur ce plan?

24. — Comment est placé, dans un paraboloïde hyperbolique, le diamètre conjugué, lorsque la section est une hyperbole? une parabole? deux droites?

25. — On considère une surface du second degré et on la coupe par un plan dont on considère le diamètre conjugué. Ne peut-on pas déduire la nature de la surface de la position respective des points d'intersection de ce diamètre avec le plan et avec la surface? — Considérer successivement les cas où la section est une ellipse, une parabole, une hyperbole.

26. — On considère l'équation $f(x) = 0$ et on y remplace x par $\dfrac{P}{Q}$, P et Q étant deux polynomes en x premiers entre eux. Démontrer que si l'équation $f\left(\dfrac{P}{Q}\right) = 0$ ainsi obtenue a une racine double, cette racine est aussi racine de l'équation $f\left(\dfrac{P'}{Q'}\right) = 0$, P' et Q' étant les dérivées de P et Q par rapport à x.

École des mines de Saint-Étienne (1890).

1. — Trouver les dérivées des fonctions suivantes :

(I) $y = (\cot g\, x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

(II) $y = (\sec \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

(III) $y = \sqrt[x^2]{\cos x}$

(IV) $y = (x+1)^{\frac{1}{(\operatorname{tg} x)^x}}$

(V) $y = (1+x)^{\frac{1}{\mathrm{L}x}}$

(VI) $e^x + (\sec xy)^{\frac{1}{2}} = 0.$

2. — Étudier les variations de la fonction $y = x(\mathrm{L}x)^2$.

3. — Soit $f(z)$ un polynome à coefficients réels; on y remplace z par $x+iy$; $f(z)$ prend la forme $P+Qi$. Quelles relations existe-t-il entre les dérivées partielles de P et Q par rapport à x et y?

4. — Si $f(x)=0$ est une équation qui a ses racines réelles et distinctes, démontrez que l'équation

$$f(x) + hf'(x) = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles et distinctes, et séparez-les.

5. — Construire les courbes

(I) $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$

(II) $y = tx, \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{t} \pm \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}}$

(III) $y^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots \frac{1}{x-n}$

(IV) $y = x + \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4}{(x+1)(x+2)^2(x+3)}}$

(V) $y = tx, \qquad x = \pm\sqrt{\frac{t(t+1)}{(t-1)(t-2)}}$

(VI) $y = tx, \quad (t^2-1)x^6 + (2t-1)x^2 - 1 = 0$

(VII) $\rho = 1 - 2\sin\frac{\omega}{3}$

(VIII) $\rho = e^{2\sin\omega}$

(IX) $\rho = \arcsin \omega^2$

(X) $\omega = \rho(\rho-1)(\rho-2)$

(XI) $\rho^2 = \frac{\sin\omega}{\omega}$

(XII) $\rho = \sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}$

(XIII) $\rho = 2 - \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$

6. — On considère toutes les hyperboles équilatères tangentes à Ox à l'origine et passant par un point A (α, β). D'un point donné B (x', y') on mène des tangentes à ces hyperboles. Trouver le lieu des points de contact.

7. — On donne une ellipse rapportée à ses axes Ox et Oy. On mène une tangente quelconque qui rencontre Ox en A, et Oy en B. Par le point A, on mène une parallèle à Oy et par le point B une parallèle à Ox; ces deux droites se coupent en un point P, dont on demande le lieu géométrique quand la tangente se déplace.

8. — Rapporter la conique $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ à ses axes de symétrie.

9. — Trouver la normale de longueur minimum dans une parabole donnée.

10. — Lieu du sommet d'une parabole de grandeur constante qui reste tangente à deux droites rectangulaires fixes.

11. — Lieu des foyers des hyperboles équilatères qui ont pour directrice Oy et qui interceptent sur Ox une longueur constante.

12. — On considère deux paraboles ayant pour foyer commun l'origine O et respectivement pour axes, les axes de coordonnées Ox et Oy supposés rectangulaires. On mène la tangente commune AB, et on prend le point P, milieu de AB.

Lieu du point P, quand les paramètres des paraboles varient de façon que leur rapport reste constant.

13. — Soit A un point situé sur Ox, B un point sur Oy. Trouver l'équation générale des paraboles circonscrites au triangle OAB.

Par un point M du plan, passent deux de ces paraboles. Trouver le lieu des points M tels que les axes des deux paraboles qui y passent fassent entre eux un angle α.

14. — Lieu des foyers des paraboles qui passent par deux points donnés, la direction de l'axe étant fixe.

15. — Trouver les foyers de l'hyperbole $xy = k^2$.

16. — Condition pour qu'une droite passant par le foyer d'une conique soit tangente à cette conique.

17. — Soit la conique

$$x = \frac{1+2t}{1-t^2}, \qquad y = \frac{1+t}{1-t}.$$

Écrire que la droite $y = ix + m$ est tangente à la conique. Comment pourriez-vous tirer de là les coordonnées des foyers?

QUESTIONS PROPOSÉES

4. — Démontrer que si un déterminant est nul, les mineurs relatifs aux éléments correspondants de deux rangées parallèles sont proportionnels, et réciproquement.

5. — On appelle déterminant symétrique gauche, tout déterminant dont les éléments vérifient la relation

$$a_{pq} + a_{qp} = 0,$$

de sorte que les éléments de la diagonale principale sont tous nuls.

Démontrer : 1° que tout déterminant symétrique gauche de degré impair est nul; 2° que tout déterminant symétrique gauche de degré pair est le carré d'une fonction rationnelle et entière des éléments du déterminant.

6. — Si l'on élimine u et v entre les équations

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

on obtiendra une relation $\qquad F(x, y, z) = 0.$

Calculer des nombres proportionnels aux dérivées du premier ordre de la fonction $F(x, y, z)$.

7. — Montrer que toute imaginaire de module égal à l'unité, peut se mettre sous la forme $\frac{1 + ai}{1 - ai}$, a désignant un nombre réel.

8. — Démontrer l'identité

$$x^n - C_n^1(x-1)^n + C_n^2(x-2)^n + \ldots + (-1)^n C_n^n(x-n)^n \equiv n!$$

9. — Démontrer l'identité

$$x^p - C_n^1(x-1)^p + C_n^2(x-2)^p + \ldots + (-1)^n C_n^n(x-n)^p \equiv 0,$$

en supposant $p < n$.

10. — Résoudre l'équation

$$x^4 - 2ax^3 - (m^2 - 2a^2)x^2 + 2am^2x - a^2m^2 = 0.$$

11. — Séparer les racines de l'équation

$$2x(x+4) - e^{a + \frac{x^2}{6}} = 0$$

suivant les différentes valeurs du paramètre a.

***12.** — Sur chacune des faces d'un cube d'arête variable $2x$, on construit une pyramide régulière, de telle façon que les six pyramides soient toutes extérieures ou toutes intérieures au cube et aient même hauteur. On donne l'aire totale $24a^2$ du polyèdre ainsi obtenu. Étudier la variation de son volume.

(*) Les questions marquées d'un * sont plus spécialement proposées pour les candidats aux écoles navale, centrale, etc.

13. — Si des milieux des côtés d'un triangle comme centres, on décrit trois circonférences avec des rayons tels que l'un d'eux soit égal à la somme ou à la différence des deux autres, les trois points de rencontre des trois couples de polaires de deux des cercles par rapport à un sommet commun pris comme pôle sont trois points en ligne droite.

(H. Lecocq, professeur au lycée d'Avignon.)

14. — a et b désignant les coordonnées rectangulaires d'un point, quelle est, pour chaque position du point, la nature des racines de l'équation

$$f(t) = 3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0?$$

On construira en particulier le lieu des positions du point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.

(*École normale*, 1884.)

***15.** — On considère les droites dont l'équation générale est, en coordonnées rectangulaires,

$$(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)a = 0,$$

λ désignant un paramètre variable.

1° Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener deux droites rectangulaires.

2° Trouver le lieu des points tels que les deux droites issues de chacun d'eux, interceptent une longueur donnée sur l'axe des x.

3° Trouver les coordonnées du point Q où se coupent les sécantes qui joignent les points d'intersection des axes avec les droites issues du point $P(x', y')$, et en déduire le lieu des points P tels que les points P et Q soient vus de l'origine sous un angle droit.

(E. Mosnat.)

***16.** — Trouver toutes les coniques dans lesquelles à deux directions de cordes rectangulaires quelconques correspondent deux diamètres rectangulaires.

17. — Lieu du centre d'une hyperbole équilatère de grandeur donnée qui passe par deux points fixes.

18. — Étant données deux coniques homofocales, trouver le lieu des sommets des angles droits AMA′ dont les côtés MA, MA′ touchent respectivement les deux courbes.

Les deux autres tangentes MB et MB′ menées de M aux deux coniques se coupent aussi à angle droit.

Les droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes MA et MA′ ou MB et MB′ enveloppent une conique homofocale aux proposées.

Le diamètre qui passe par le point M passe aussi par les milieux des cordes de contact des tangentes MA et MA′ ou MB et MB′.

19. — Par un point M d'une ellipse on peut mener trois normales à la courbe, indépendamment de celle dont le pied est en M. Sur chacune d'elles on porte, à partir du point M, une longueur égale au segment intercepté entre le grand axe et le pied.

Démontrer que les trois points ainsi obtenus sont sur un même cercle tangent à l'ellipse au point M.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. CHAIX. — 17062-8-90.

1re Année. N° 2. Novembre 1890.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

SUR LES EXPRESSIONS INDÉTERMINÉES

QUI SONT FONCTIONS ALGÉBRIQUES IRRATIONNELLES DE LA VARIABLE

La plupart des formes indéterminées peuvent se ramener à la forme $\frac{0}{0}$ quand on donne à la variable la valeur 0. Si les deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont nulles pour $x = 0$, la limite du quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ pour $x = 0$ s'obtient en prenant le rapport des parties principales des deux infiniment petits $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Je me propose de montrer dans ce qui suit comment, par de simples opérations telles que la division et l'extraction de racines des polynomes, on peut obtenir les parties principales des fonctions considérées quand elles sont algébriques et irrationnelles.

Soient d'abord deux polynomes A et B ordonnés par rapport aux puissances croissantes, B ayant un terme indépendant. En divisant A par B, si la division est impossible (ce qui est le cas général), on peut prolonger l'opération aussi loin que l'on veut; on peut avoir un quotient Q, de degré n :

$$Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$$

et un reste qu'on peut écrire $x^{n+1}R$.

$$A \equiv BQ + x^{n+1}R, \qquad n \text{ étant arbitraire;}$$

de là on tire

$$\frac{A}{B} \equiv Q + x^{n+1}\frac{R}{B}.$$

$\frac{R}{B}$ est une fonction de x qui a une valeur finie pour $x = 0$; en la désignant par λ, on aura

$$\frac{A}{B} \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \lambda x^{n+1},$$

λ étant une fonction qui a une valeur finie pour $x = 0$.

De même, soit à extraire la racine m^e d'un polynome A ordonné par rapport aux puissances croissantes et ayant un terme constant. On peut pousser l'extraction de racine aussi loin qu'on le veut, jusquà ce qu'on ait à la racine un polynome de dégré n, et l'on a

$$A \equiv C^m + x^{n+1}R, \qquad R \text{ étant un polynome;}$$

de là on tire

$$A - C^m \equiv x^{n+1}R.$$

Or,

$$A - C^m \equiv \left(\sqrt[m]{A} - C\right)\left(\sqrt[m]{A^{m-1}} + C\sqrt[m]{A^{m-2}} + \ldots + C^{m-1}\right),$$

d'où

$$\sqrt[m]{A} - C \equiv x^{n+1}\frac{R}{\sqrt[m]{A^{m-1}} + C\sqrt[m]{A^{m-2}} + \ldots + C^{m-1}}.$$

Soit α_0 le premier terme de A; le premier terme de C est $\sqrt[m]{\alpha_0}$; par suite, le dénominateur du coefficient de x^{n+1} se réduit à $m\sqrt[m]{\alpha_0^{m-1}}$ pour $x = 0$. On peut donc poser

$$\sqrt[m]{A} \equiv C + \lambda x^{n+1},$$

λ étant une fonction de x qui a une valeur finie pour $x = 0$.

Donc $$\sqrt[m]{A} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \lambda x^{n+1}.$$

Ces calculs reviennent, comme on voit, à développer $\frac{A}{B}$ et $\sqrt[m]{A}$ suivant les puissances croissantes de x, en poussant le développement aussi loin que l'on veut.

On peut même appliquer un développement semblable aux racines d'une fonction rationnelle telle que $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$. On commence par développer $\frac{A}{B}$ comme nous l'avons vu :

$$\frac{A}{B} = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \lambda x^{n+1},$$

puis on extrait la racine du second membre, en y considérant λ comme une constante; seulement on pousse le développement de $\frac{A}{B}$ suffisamment loin pour que le développement désiré de $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$ soit indépendant de λ. On a alors

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k + \mu x^{k+1}.$$

On peut également développer des radicaux superposés par un procédé semblable.

Ces préliminaires une fois posés, étant donnée une forme indéterminée, on peut toujours la ramener à la forme $\frac{0}{0}$. Si c'est pour $x = a$, on posera $x = a + y$, et l'indétermination aura lieu pour $y = 0$. Si c'est pour x infini, on posera $x = \frac{1}{y}$, et il suffira de chercher les parties principales des deux membres de l'expression.

Applications. — 1° Considérons d'abord un exemple très simple :

Trouver la limite de $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[q]{x}}{\sqrt[m]{x} - \sqrt[n]{x}}$ pour $x = 1$.

Je pose $x = 1 + y$. Alors

$$\sqrt[p]{1+y} = 1 + \frac{y}{p} + \lambda y^2, \qquad \sqrt[q]{1+y} = 1 + \frac{y}{q} + \lambda' y^2,$$

$$\sqrt[m]{1+y} = 1 + \frac{y}{m} + \lambda'' y^2, \qquad \sqrt[n]{1+y} = 1 + \frac{y}{n} + \lambda''' y^2,$$

$\lambda, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ ayant des limites finies pour $y = 0$. L'expression proposée devient

$$\frac{y\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + (\lambda - \lambda')y^2}{y\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) + (\lambda'' - \lambda''')y^2} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + (\lambda - \lambda')y}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n} + (\lambda'' - \lambda'')y}.$$

qui a pour limite $\dfrac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$ pour $y = 0$.

2° Limite de $\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x$ pour x infini.

Posons $x = \frac{1}{y}$; l'expression devient

$$\frac{\sqrt{1+y+y^2}+\sqrt{4-y^2}-3}{y}.$$

$$\sqrt{1+y+y^2}=1+\frac{y}{2}+\lambda y^2, \qquad \sqrt{4-y^2}=2+\mu y^2,$$

λ et μ ayant des limites finies pour $y=0$.

L'expression devient $\dfrac{\frac{y}{2}+(\lambda+\mu)y^2}{y}$, dont la limite est $\frac{1}{2}$.

3° Soit a trouver la limite de

$$\frac{[19x+\sqrt{29x+35}]^{\frac{1}{3}}-[5x^2+69+\sqrt{48x+1}]^{\frac{1}{4}}}{(5x+3)^{\frac{1}{3}}-(x^2-x+4)^{\frac{1}{2}}}$$

pour $x=1$.

(Exercice proposé dans le premier volume de l'Algèbre de M. Niewenglowski, page 171.)

On voit aisément que cette expression est de la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=1$. Posons $x=1+y$; il vient

$$\frac{[19+19y+\sqrt{64+29y}]^{\frac{1}{4}}-[74+10y+5y^2+\sqrt{49+48y}]^{\frac{1}{4}}}{(8+5y)^{\frac{1}{3}}-(4+y+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

D'autre part, on a $\sqrt{64+29y}=8+\frac{29}{16}y+\lambda y^2,$

$$19+19y+\sqrt{64+29y}=27+\frac{333}{16}y+\lambda y^2;$$

de même, $74+10y+5y^2+\sqrt{49+48y}=81+\frac{94}{7}y+\mu y^2,$

λ et μ ayant des valeurs finies pour $y=0$.

$$(27+\frac{333}{16}y+\lambda y^2)^{\frac{1}{3}}=3+\frac{333}{16\times 3^3}y+\lambda' y^2,$$

$$(81+\frac{94}{7}y+\mu y^2)^{\frac{1}{4}}=3+\frac{94}{7\times 4\times 3^3}y+\mu' y^2.$$

La partie principale du numérateur est donc

$$y\left[\frac{333}{16\times 3^3}-\frac{94}{7\times 4\times 3^3}\right]=\frac{1955}{2^4\times 3^3\times 7}y.$$

Quant au dénominateur, on a $(8+5y)^{\frac{1}{3}}=2+\frac{5}{12}y+\lambda'' y^2,$

$$(4+y+y^2)^{\frac{1}{2}}=2+\frac{y}{4}+\mu'' y^2.$$

La partie principale du dénominateur est donc

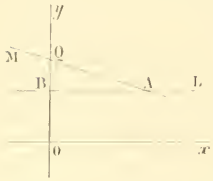
$$y\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{4}\right)=\frac{y}{6}.$$

Par suite, l'expression proposée a pour limite $\dfrac{1955\times 6}{2^4\times 3^3\times 7}=\dfrac{1955}{504}$.

G. Papelier.

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1890).

20. — *Oxy étant deux axes rectangulaires,* BL *une droite fixe parallèle à l'axe des* x (y = b), *et* A *un point mobile sur cette droite* (BA = α); *à chaque position du point* A *correspond une hyperbole équilatère passant par les trois points* A, B, O *et tangente en* O *à l'axe des* x.



1° Trouver le lieu des centres de toutes ces hyperboles, et construire, pour une position donnée du point A, *le centre et les asymptotes de l'hyperbole équilatère correspondant à ce point.*

2° On joint le point variable A *à un point fixe* Q *pris sur l'axe des* y. *La droite* QA *rencontre l'hyperbole correspondant au point* A *en un second point,* M : *trouver le lieu de ce point; discuter la nature de ce lieu suivant la position du point* Q *sur l'axe des* y.

Si nous traçons la droite OA, nous pouvons regarder le triangle OAB comme la limite d'un quadrilatère dont un côté dirigé suivant Ox serait nul. Les équations des côtés de ce quadrilatère sont, en groupant les côtés opposés :

$$\begin{cases} x = 0 \\ bx - \alpha y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y - b = 0. \end{cases}$$

L'équation générale qui représente toutes les coniques circonscrites à ce quadrilatère est

$$x(bx - \alpha y) + \lambda y(y - b) = 0. \tag{1}$$

On peut dire aussi qu'elle représente toutes les coniques circonscrites au triangle OAB et ayant l'axe des x pour tangente en O; c'est d'ailleurs ce qu'on vérifie sans peine : car l'équation admet évidemment les trois solutions

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = b \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = b. \end{cases}$$

De plus, on sait que quand une conique passe par l'origine des coordonnées, on a l'équation de la tangente en ce point en égalant à zéro les termes du premier degré; ces termes se réduisent ici à $-\lambda by$. L'équation de la tangente à l'origine est donc bien $y = 0$. *Toutes* les coniques remplissant ces quatre conditions sont représentées par l'équation (1), puisque cette équation renferme un paramètre arbitraire λ dont on peut disposer de manière qu'une cinquième condition soit satisfaite.

Exprimons que l'équation (1) représente une hyperbole équilatère. On sait que, pour cela, il faut et il suffit que la somme des coefficients de x^2 et de y^2 soit nulle. Cette condition est ici

$$b + \lambda = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = -b.$$

L'hyperbole équilatère qui remplit toutes les conditions de l'énoncé a donc pour équation

$$x(bx - \alpha y) - by(y - b) = 0. \tag{2}$$

1° Cherchons le lieu des centres de toutes ces coniques lorsque le paramètre variable α prend toutes les valeurs possibles. Supposons qu'on donne à α une valeur particulière; le centre de la conique correspondante sera le point commun aux deux droites

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0,$$

c'est-à-dire

$$2bx - \alpha y = 0, \qquad -\alpha x - 2by + b^2 = 0.$$

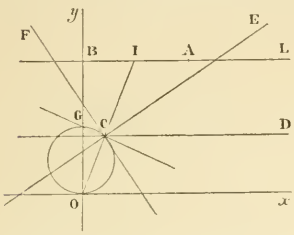
L'équation du lieu est la condition nécessaire et suffisante que doivent remplir x et y pour que ces équations soient satisfaites par une même valeur de α. Si nous les écrivons de la manière suivante :

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha y - 2bx = 0, \\ \alpha x + 2by - b^2 = 0, \end{cases}$$

nous voyons que cette condition est

$$2bx^2 + 2by^2 - b^2y = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad x^2 + y^2 - \frac{1}{2}by = 0.$$

Elle exprime que le point x, y se trouve sur la circonférence d'un cercle dont on aura le centre et le rayon en mettant l'équation qui précède sous la forme



$$(4) \qquad x^2 + (y - \frac{1}{4}b)^2 = \frac{b^2}{16}.$$

Le centre est donc situé au quart de la distance OB à partir du point O. Le rayon est $\frac{1}{4}b$. (Nous supposons b positif). La circonférence passe au point O.

Réciproquement, tout point de cette circonférence est un point du lieu. Soient, en effet, x et y les coordonnées d'un point choisi arbitrairement sur cette circonférence; ces valeurs de x et y satisfont à l'équation (4), de sorte que pour ces mêmes valeurs les équations (3) sont satisfaites pour une même valeur de α, réelle, finie et déterminée à la seule condition $y \neq 0$. Cette valeur de α étant transportée dans l'équation (2), on a l'équation d'une hyperbole équilatère satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé et dont le centre est le point choisi.

Si l'on choisissait sur la circonférence le point dont l'ordonnée est nulle, l'équation (4) montre que l'abscisse serait également nulle, de sorte que ce point est l'origine des coordonnées. La valeur correspondante de α est infinie d'après la seconde équation (3); l'équation (2) se réduit alors à

$$xy = 0,$$

et représente les axes de coordonnées. Ces deux droites peuvent être regardées comme formant une hyperbole équilatère remplissant les conditions de l'énoncé, le point A étant supposé à l'infini sur BL. Le centre de cette hyperbole particulière est bien l'origine des coordonnées.

Occupons-nous de la construction géométrique du centre et des asymptotes de l'hyperbole qui passe par le point A. Remarquons pour cela que BA est une corde parallèle à la tangente Ox dont le point de contact est O. La droite OI qui joint le point O au milieu I de la corde est donc le diamètre des cordes parallèles à Ox; c'est un lieu du centre cherché. Il rencontre le cercle trouvé plus haut en un point C, centre de l'hyperbole qui passe au point A.

Pour obtenir les asymptotes, nous remarquerons que dans l'hyperbole équilatère ces droites sont les bissectrices des angles formés par deux diamètres conjugués quelconques. Or le diamètre conjugué de CI est la parallèle CD menée à Ox par le centre C. Les asymptotes demandées sont donc la bissectrice CE de l'angle DCI et la perpendiculaire CF à CE.

2° Désignons par c l'ordonnée du point fixe Q. L'équation de la droite QA est

$$(5) \qquad y - c = \frac{b-c}{\alpha}x, \qquad \text{ou bien} \qquad \alpha(y - c) - (b - c)x = 0.$$

Éliminons α entre cette équation et celle de l'hyperbole

$$(2) \qquad x(bx - \alpha y) - by(y - b) = 0;$$

nous aurons ainsi le lieu de tous les points communs à la droite et à la courbe; il se compose évidemment de la droite BL donnée et du lieu des points M.

Pour faire cette élimination, c'est-à-dire pour exprimer que les équations (2) et (5) ont une racine commune, nous les écrivons de la manière suivante:

$$\alpha(y - c) - (b - c)x = 0,$$
$$\alpha xy - bx^2 + by(y - b) = 0.$$

La condition cherchée est

$$(b - c)x^2y - b(y - c)x^2 + by(y - c)(y - b) = 0,$$

ou bien
$$cx^2(b - y) - by(y - c)(b - y) = 0.$$

Supprimons le facteur $b - y$, qui donnerait, en l'égalant à zéro, le lieu des points A; nous obtenons pour la condition cherchée

$$cx^2 - by(y - c) = 0,$$

ou bien
$$cx^2 - by^2 + bcy = 0.$$

Réciproquement, si cette condition est remplie par les coordonnées d'un point M, on verrait comme précédemment qu'il est possible de faire passer par ce point une droite et une hyperbole équilatère satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Donc M est un point du lieu.

Ce lieu est une conique dont un axe se confond avec l'axe des y, puisque l'équation n'est pas modifiée quand on remplace x par $-x$. Cet axe coupe les courbes aux points ayant pour ordonnées

$$y = 0 \quad \text{et} \quad y = c,$$

c'est-à-dire que l'origine des coordonnées et le point donné Q sont des sommets de la courbe. Il en résulte que le centre est le milieu de la distance de ces deux points.

La courbe est une hyperbole si c est positif, c'est-à-dire si B et Q sont d'un même côté du point O. Si Q et O se confondent, le lieu est une droite double confondue avec l'axe des x. Enfin, c'est une ellipse si B et Q sont situés de part et d'autre du point O.

Remarque. — Le premier lieu géométrique demandé peut être obtenu géométriquement en s'appuyant sur cette propriété :

Dans une hyperbole équilatère, l'angle de deux diamètres est égal à l'angle des diamètres qui leur sont respectivement conjugués.

En effet, dans une hyperbole équilatère, deux diamètres conjugués OD, OD′ sont symétriques par rapport à chacune des deux asymptotes. De même, deux autres diamètres conjugués OE, OE′ sont également symétriques par rapport aux asymptotes, d'où il résulte évidemment que les angles $\widehat{DOE}$ et $\widehat{D'OE}$ sont égaux. En particulier, si les droites OD et OE sont rectangulaires, il en sera de même des droites OD′ et OE′.

D'après cela, les diamètres conjugués des cordes respectivement parallèles aux axes de coordonnées sont rectangulaires. Or, on a vu que le diamètre des cordes parallèles à Ox est OI; ce diamètre tourne autour du point O quand le point A parcourt la droite donnée BL. Soit G le milieu de la corde OB dirigée suivant Oy; G est un point fixe autour duquel tourne le diamètre des cordes parallèles à Oy. Mais, d'après la remarque faite plus haut, ce diamètre est perpendiculaire à OI. Donc, le point de rencontre de ces deux diamètres, c'est-à-dire le centre de l'hyperbole, est sur le cercle décrit sur OG comme diamètre. Il est facile de s'assurer que tous les points de ce cercle sont bien des points du lieu demandé. E. D.

Ont envoyé de bonnes solutions : MM. M. François, à Remiremont ; E. Hallard, lycée de Bordeaux ; A. Johner, à Alger ; F. Leray, à Rennes ; Ochs ; J. Petrignani, lycée de Marseille ; G. Piedanna, lycée Janson-de-Sailly ; L. Tronchon, lycée de Lyon.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1890).

Physique.

21. — *Étudier la marche des rayons qui, partis d'un point lumineux, ont traversé une lentille, de faible ouverture et d'épaisseur négligeable, dont l'une des faces est taillée suivant un cylindre circulaire droit convexe, la deuxième face étant plane et parallèle à l'axe du cylindre. Passer de là au cas où la source de lumière est une petite droite perpendiculaire à l'axe principal.*

Examiner enfin ce qui se passe quand la lentille plan-cylindrique est immédiatement suivie d'une lentille sphérique convergente infiniment mince.

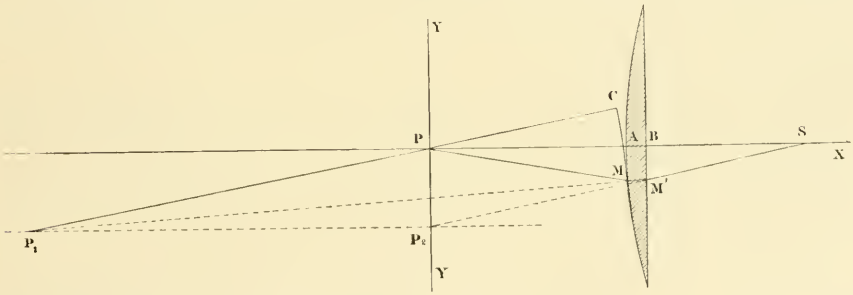
I. — Soit le point lumineux P sur l'axe AX de la lentille dont le plan de la figure est une section droite. Le faisceau total émané de P peut être considéré comme formé de faisceaux plans tombant chacun sur une génératrice de la surface cylindrique A. L'effet de la lentille sera donc le même que celui d'un système d'une infinité de prismes limités chacun par un plan tangent à la surface A et par la face plane B.

Soit M la trace d'une génératrice : considérons l'effet du prisme correspondant sur le faisceau plan qui coupe le plan de la figure suivant PM. Le rayon PM sera réfracté suivant MM′, dont le prolongement rencontre en P_1 la perpendiculaire PC au plan tangent en M. Si i et r sont les angles d'incidence et de réfraction, on a dans le triangle PP_1M :

$$\frac{P_1M}{PM} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

En appelant p et p_1 les distances de P et P_1 à la lentille, on a donc $p_1 = np$.

Les rayons du faisceau plan autres que PM, après réfraction, passent par des points de la droite



PC qui coïncident sensiblement avec P_1, car la lentille ayant une faible ouverture, la distance de P à chaque point d'incidence est considérée comme égale à PM ou p; la valeur de p_1 reste donc la même.

Cela revient aussi à confondre la portion utile de la génératrice M avec un petit arc de cercle qui aurait son centre en C, et il est clair que les rayons réfractés sont alors sur une portion de surface d'un cône ayant son sommet en P_1, portion que l'on peut confondre encore avec le plan tangent à ce cône suivant P_1MM', plan perpendiculaire au plan de la figure. Des considérations analogues se présentent à la sortie du faisceau sortant de la face B.

Les rayons sortants formeront ainsi un faisceau sensiblement plan, perpendiculaire au plan de

la figure, et passeront par un point P_2 dont la distance p_2 à la lentille sera donnée par $p_2 = \frac{1}{n} p_1$, ou, d'après la relation $p_1 = np$ et en négligeant l'épaisseur de la lentille, $p_2 = p$.

Les rayons sortants de notre prisme élémentaire seront donc divergents comme s'ils venaient d'un point P_2 situé sur une perpendiculaire YY à l'axe de la lentille et à l'axe de la surface cylindrique. Celui de ces rayons qui est dans le plan de la figure coupe AX en S, point qui est évidemment le même pour tous les faisceaux plans analogues, ce point étant le conjugué de P pour tous les rayons contenus dans le plan de la figure et qui se conduisent comme si la lentille était une lentille plan-convexe sphérique. Si $AS = p'$, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{n-1}{R}, \tag{1}$$

R étant le rayon du cylindre.

Tous les faisceaux plans divergents sortants se coupent donc suivant une portion de droite passant par S, perpendiculaire au plan de la figure, perpendiculaire à l'axe de la lentille et parallèle à l'axe du cylindre A.

Ainsi, chaque rayon sortant de la lentille s'appuie sur la droite YY et sur la droite S. Ces deux droites constituent ici les deux surfaces caustiques dont la théorie démontre l'existence pour tout faisceau parti d'un point unique et qui a subi une série de réfractions ou réflexions sur des surfaces quelconques.

La discussion des positions du point P et de la ligne S est facile et se déduit de l'équation (1) comme la question analogue des lentilles sphériques.

Quand $p = \frac{R}{n-1}$, P est en un point F qu'on peut appeler foyer principal, la ligne S est à l'infini, ce qui veut dire que les faisceaux plans émanés de P sont devenus parallèles à la sortie; mais dans chacun de ces faisceaux il y a toujours divergence des rayons, car la ligne virtuelle YY ne s'évanouit pas.

Si P est au delà de F, la ligne S est réelle; si P est en deçà de F, la ligne S est virtuelle.

Quand le point P n'est pas sur l'axe de la lentille, toutes les conclusions générales de l'étude précédente subsistent; les deux lignes YY et S sont toujours perpendiculaires entre elles; seulement la trace S se trouve sur l'axe secondaire PA.

II. — Cas d'une droite lumineuse perpendiculaire à l'axe et passant par le point P. — Il suffit de se bien représenter la superposition ou la juxtaposition des effets produits par les différents points de la droite P en tenant compte de l'observation qui termine le paragraphe précédent.

Si la droite P est parallèle à l'axe de la surface cylindrique, il est clair que toutes les droites analogues à YY formeront un rectangle virtuel; et toutes les droites analogues à S se superposeront suivant une droite unique parallèle à la droite P.

Si la droite P est perpendiculaire à l'axe de la surface cylindrique, ce sont toutes les droites analogues à YY qui sont superposées en coïncidence avec la droite P elle-même. Mais l'ensemble des droites analogues à S, rangées côte à côte, forme un rectangle parallèle à la face plane de la lentille, et dont la dimension transversale est facile à déterminer.

Si enfin la droite P, tout en étant toujours perpendiculaire à l'axe de la lentille, est oblique relativement à l'axe du cylindre, on voit que les droites analogues à YY et celles analogues à S forment deux surfaces planes parallélogrammes obliques.

III. — Le faisceau ayant pour origine le point P et transmis par la lentille, a une structure particulière mise en évidence par la théorie exposée ci-dessus. La ligne S n'est pas assimilable par exemple à une ligne lumineuse ordinaire où des rayons peuvent être émis ou se croiser dans toutes directions,

ce qui fait notamment qu'une ligne lumineuse mise à la place de S ne donnerait pas comme image le point P seulement, comme on serait tenté de le croire par une fausse interprétation du principe du retour inverse des rayons. Mais les rayons du faisceau en question qui se rencontrent sur deux droites composent une partie des faisceaux qu'enverraient ces deux droites si elles étaient des droites lumineuses ordinaires réelles ou virtuelles. Donc, reçus sur une lentille sphérique, ils donneront lieu, à l'intensité près, aux mêmes effets de convergence ou de divergence que si les droites YY et S étaient des droites lumineuses.

En conséquence, la lentille sphérique de distance focale f qui suit la lentille cylindrique donnera, des lignes YY et S, des images dont il est facile de trouver la position. Dans le cas ordinaire (YY virtuelle et S réelle), on trouvera dans le faisceau réfracté, d'abord l'image S′ linéaire et réelle, image de S, parallèle à S, située à une distance l_1 de la lentille telle que $-\frac{1}{p'}+\frac{1}{l_1}=\frac{1}{f}$. — Puis une image linéaire de YY, parallèle à YY, à une distance l_2 telle que $\frac{1}{p}+\frac{1}{l_2}=\frac{1}{f}$, image qui sera réelle comme la première si $p > f$.

On pourra donc recevoir sur un écran placé plus ou moins loin au delà du système des deux lentilles au contact deux images réelles linéaires du point P dans deux directions perpendiculaires. Le faisceau réfracté conserve donc toujours sa structure de lignes s'appuyant sur deux droites perpendiculaires.

La discussion des différents cas, P à diverses distances, puis P remplacé par une ligne lumineuse, n'offre pas de difficultés, mais constitue un bon exercice que nous recommandons aux élèves.

A. L.

ALGÈBRE

4. — *Démontrer que si un déterminant est nul, les mineurs relatifs aux éléments correspondants de deux rangées parallèles sont proportionnels, et réciproquement.*

Soit $D = (a_1^1 a_2^2 \ldots a_n^n)$ un déterminant nul. Considérons un système homogène de n équations à n inconnues où le coefficient de x_l dans la k^{me} équation soit a_k^l; il a des solutions différentes de zéro. Supposons que l'un au moins des coefficients de la p^{me} ligne et l'un de ceux des éléments de la q^{me} ne soient pas nuls. On sait que la solution générale est, en appelant α_i^j le coefficient de l'élément a_i^j :

$$x_1 = \lambda\alpha_p^1, \qquad x_2 = \lambda\alpha_p^2, \ldots, \qquad x_n = \lambda\alpha_p^n,$$

λ étant quelconque; comme d'autre part elle est, μ étant une arbitraire :

$$x_1 = \mu\alpha_q^1, \qquad x_2 = \mu\alpha_q^2, \ldots, \qquad x_n = \mu\alpha_q^n.$$

à une valeur de λ correspond une valeur pour μ telle qu'on ait :

$$(1) \qquad \lambda\alpha_p^1 = \mu\alpha_q^1, \quad \lambda\alpha_p^2 = \mu\alpha_q^2, \ldots, \quad \lambda\alpha_p^n = \mu\alpha_q^n.$$

Le théorème est donc établi pour les lignes; il en est de même des colonnes.

Réciproquement, si les relations (1) ont lieu entre les éléments de deux lignes, le déterminant Δ adjoint de D a deux rangées parallèles à éléments proportionnels; donc $\Delta = 0$; et comme $\Delta = D^{n-1}$, on doit avoir $D = 0$.

H. de Montille, élève au lycée Louis-le-Grand.

On peut démontrer ainsi la réciproque : supposons

$$\alpha_q^1 = h\alpha_p^1, \qquad \alpha_q^2 = h\alpha_p^2, \ \ldots, \qquad \alpha_q^n = h\alpha_p^n;$$

on a

$$D = a_q^1\alpha_q^1 + a_q^2\alpha_q^2 + \ldots + a_q^n\alpha_q^n = h(a_q^1\alpha_p^1 + a_q^2\alpha_p^2 + \ldots + a_q^n\alpha_p^n) = 0.$$

Autres solutions : M. J. G. Darboux (Louis-le-Grand) ; L. Drix (lycée de Lille).

5. — *On appelle déterminant symétrique gauche, tout déterminant dont les éléments vérifient la relation* $a_{pq} + a_{qp} = 0$, *de sorte que les éléments de la diagonale principale sont tous nuls.*

Démontrer : 1° que tout déterminant symétrique gauche de degré impair est nul; 2° que tout déterminant symétrique gauche de degré pair est le carré d'une fonction rationnelle et entière des éléments du déterminant.

1° Si le déterminant gauche est de degré impair, à tout terme tel que $(-1)^{I+I'}a_\alpha^{\alpha'}a_\beta^{\beta'}\ldots a_\lambda^{\lambda'}$, où I et I′ sont les nombres d'inversions des deux suites d'indices, nous associerons le terme $(-1)^{I'+1}a_\alpha^{\alpha'}a_\beta^{\beta'}\ldots a_\lambda^{\lambda'}$; ou bien ils sont nuls à la fois, ou ils sont égaux et de signes contraires. Leur somme est donc toujours nulle, ainsi que le déterminant.

2° Nous partirons de l'identité suivante (Niewenglowski, *Algèbre*, page 229) :

$$D\frac{\partial^2 D}{\partial a_m^r \partial a_q^s} = \frac{\partial D}{\partial a_m^r}\frac{\partial D}{\partial a_q^s} - \frac{\partial D}{\partial a_m^s}\frac{\partial D}{\partial a_q^r},$$

D désignant le déterminant considéré, $\frac{\partial D}{\partial a_m^r}$ sa dérivée par rapport à a_m^r et $\frac{\partial^2 D}{\partial a_m^r \partial a_q^s}$ sa dérivée seconde par rapport à a_m^r, puis a_q^s. Soit n le degré de D.

Posons $m = r = n$; $q = s = n - 1$; l'identité devient

$$(1) \qquad D.\frac{\partial^2 D}{\partial a_n^n \partial a_{n-1}^{n-1}} = \frac{\partial D}{\partial a_n^n}\frac{\partial D}{\partial a_{n-1}^{n-1}} - \frac{\partial D}{\partial a_{n-1}^n}\frac{\partial D}{\partial a_n^{n-1}}.$$

Vérifions d'abord que pour $n = 2$, D est carré parfait. On a

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{vmatrix} = a^2.$$

Admettons le théorème pour tous les déterminants gauches de degré moindre qu'un nombre pair n; je dis qu'il est vrai pour ceux de degré n. En effet, si n est pair, $\frac{\partial D}{\partial a_n^n}$ est un déterminant gauche de degré impair, et par suite nul; $\frac{\partial^2 D}{\partial a_n^n \partial a_{n-1}^{n-1}}$ est un déterminant gauche de degré pair $n - 2$, et par suite un carré. Je dis que $\frac{\partial D}{\partial a_n^{n-1}} = -\frac{\partial D}{\partial a_{n-1}^n}$; en effet :

$$\frac{\partial D}{\partial a_n^{n-1}} = -\begin{vmatrix} 0 & -a_1^2 \ldots & -a_1^{n-1} \\ +a_1^2 & \ldots & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & 0 \\ +a_1^n & \ldots & +a_n^{n-1} \end{vmatrix} = -(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} 0 & +a_1^2 \ldots & +a_1^{n-1} \\ -a_1^2 & \ldots & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & 0 \\ -a_1^n & \ldots & -a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_1^2 \ldots & -a_1^n \\ a_1^2 & \ldots & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ a_1^{n-1} & \ldots & 0 \ -a_{n-1}^n \end{vmatrix} = -\frac{\partial D}{\partial a_{n-1}^n}.$$

La formule (1) donne donc

$$D.\frac{\partial^2 D}{\partial a_n^n \partial a_{n-1}^{n-1}} = \left(\frac{\partial D}{\partial a_n^{n-1}}\right)^2,$$

ce qui prouve que D est le carré d'une fonction rationnelle φ de ses éléments; cette fonction φ est entière, puisque le carré d'une fonction rationnelle ne peut être entier qu'autant qu'elle l'est.

H. de Montille.

6. — *Si l'on élimine* u *et* v *entre les équations*

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

on obtiendra une relation $F(x, y, z) = 0$.

Calculer des nombres proportionnels aux dérivées du premier ordre de la fonction $F(x, y, z)$.

Supposons que dans le champ des valeurs de u et de v que l'on considère, $f_1(u, v)$, $f_2(u, v)$, $f_3(u, v)$ admettent des dérivées partielles par rapport à u et à v, et que dans le champ des valeurs de x, y et z qui correspond à celui des valeurs de u et de v, $F(x, y, z)$ soit pourvu de dérivées partielles F'_x, F'_y, F'_z. On aura

$$(1) \qquad F'_x \frac{\partial f_1(u, v)}{\partial u} + F'_y \frac{\partial f_2(u, v)}{\partial u} + F'_z \frac{\partial f_3(u, v)}{\partial u} = 0,$$

$$(2) \qquad F'_x \frac{\partial f_1(u, v)}{\partial v} + F'_y \frac{\partial f_2(u, v)}{\partial v} + F'_z \frac{\partial f_3(u, v)}{\partial v} = 0.$$

Ces équations montrent que F'_x, F'_y, F'_z sont proportionnels à

$$\frac{D(f_2, f_3)}{D(u, v)}, \qquad \frac{D(f_3, f_1)}{D(u, v)}, \qquad \frac{D(f_1, f_2)}{D(u, v)},$$

en abrégeant à l'aide de la notation des déterminants fonctionnels. Ceci suppose l'un des trois déterminants différent de 0; si un ou deux d'entre eux seuls étaient nuls, les dérivées partielles de F correspondantes seraient nulles.

S'ils sont tous nuls, ces équations se réduisent à l'une d'elles et ne déterminent plus F'_x, F'_y, F'_z; mais cela ne peut avoir lieu quels que soient u et v que si f_1, f_2, f_3 sont liées par des relations, en vertu d'un théorème connu sur les déterminants fonctionnels.

H. de Montille.

Exercice. — *Appliquer à l'équation du plan tangent à une surface définie par les équations*

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v).$$

7. — *Montrer que toute imaginaire de module égal à l'unité peut se mettre sous la forme* $\frac{1 + ai}{1 - ai}$, a *désignant un nombre réel.*

Soit en effet $p + qi$ un nombre imaginaire tel que

$$p^2 + q^2 = 1.$$

Si nous posons

$$p + qi = \frac{1 + ai}{1 - ai},$$

nous trouvons, en identifiant, les deux équations

$$(1) \qquad p + aq = 1,$$

$$(2) \qquad q - ap = a.$$

Ces deux équations donnent respectivement pour valeur de a

$$a = \frac{1 - p}{q}, \qquad a = \frac{q}{1 + p}.$$

D'ailleurs q est supposé différent de zéro, et l'on ne peut supposer $p = -1$, sans quoi l'hypothèse $q^2 + q^2 = 1$, donnerait $q = 0$.

Or

$$\frac{1 - p}{q} = \frac{1 - p^2}{q(1 + p)} = \frac{q^2}{q(1 + p)} = \frac{q}{1 + p}.$$

Donc les équations (1) et (2) sont compatibles, et l'imaginaire $p + qi$ peut se mettre indifféremment sous les deux formes

$$\frac{1 + \frac{1-p}{q} i}{1 - \frac{1-p}{q} i} \quad \text{ou} \quad \frac{1 + \frac{q}{1+p} i}{1 - \frac{q}{1+p} i}.$$

L. P. Randon, lycée Louis-le-Grand.

Ont envoyé de bonnes solutions : MM. F. Leray (instituteur à Rennes ; Teilhet (à Saint-Étienne ; Baudran, élève du lycée de Rouen : Marey-Monge, élève du lycée Louis-le-Grand ; L. Drin, élève du lycée de Lille.

M. de Montille, élève du lycée Louis-le-Grand, remarque que toute imaginaire de module égal à l'unité étant de la forme $\cos\varphi + i\sin\varphi$, en posant $a = \operatorname{tg} x$, $\frac{1+ai}{1-ai}$ devient $\frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$ ou $\cos 2x + i\sin 2x$, donc $a = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$.

Remarque analogue par M. Perrée, élève du lycée Condorcet.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

16. — *Trouver toutes les coniques dans lesquelles à deux directions de cordes rectangulaires quelconques correspondent deux diamètres rectangulaires.*

Les paraboles ayant tous leurs diamètres parallèles, ne peuvent évidemment satisfaire à la condition demandée. On recherchera donc ces coniques parmi les coniques à centre.

Rapportons-les à leurs axes de symétrie. Leur équation est

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Les cordes de direction λ ont pour diamètre $Ax + \lambda Cy = 0$.

Celles de directions $-\frac{1}{\lambda}$ ont pour diamètre $\lambda Ax - Cy = 0$.

Écrivons que ces deux diamètres sont perpendiculaires :

$$-\frac{A}{\lambda C} = -\frac{C}{\lambda A}.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit λ, on aura comme condition cherchée

$$A^2 - C^2 = 0, \quad \text{soit} \quad A + C = 0 \quad \text{ou} \quad A - C = 0.$$

L'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 + M = 0$ et le cercle $x^2 + y^2 + M = 0$ sont donc les seules coniques satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

F. Leray, instituteur à Rennes.

Autre solution analogue : M. Baudran (lycée de Rouen).

19. — *Par un point* M *d'une ellipse, on peut mener trois normales à la courbe, indépendamment de celle dont le pied est en* M. *Sur chacune d'elles on porte, à partir du point* M, *une longueur égale au segment intercepté entre le grand axe et le pied.*

Démontrer que les trois points ainsi obtenus sont sur un même cercle tangent à l'ellipse au point M.

Soit $a^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes.

Désignons par α, β les coordonnées du point M.

Les coordonnées des points d'incidence (autres que M) des trois normales à l'ellipse vérifient l'équation de l'ellipse

$$(1) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et l'équation du cercle de Joachimstal

$$(2) \qquad a^2b^2(x^2 + y^2) - \alpha b^4 x - \beta a^4 y - a^2b^2(a^2 + b^2) = 0.$$

Soient x, y les coordonnées d'un quelconque N des trois points d'incidence; cherchons les coordonnées (X, Y) du point P tel que MP = QN, Q étant le point où la normale MN rencontre le grand axe de l'ellipse.

On a
$$X = \alpha + \frac{b^2 x}{a^2},$$
$$Y = \beta + y.$$

En remplaçant x, y tirées de ces deux équations dans (1), (2), on voit que les coordonnées des trois points P vérifient les deux équations
$$a^2(X - \alpha)^2 + b^2(Y - \beta)^2 = b^4,$$
$$a^6(X - \alpha)^2 + a^2b^4(Y - \beta)^2 - \alpha a^2b^4(X - \alpha) - \beta a^2b^2(Y - \beta) - b^4(a^2 + b^2) = 0$$

Ces deux équations représentent deux coniques ayant leurs axes parallèles; donc par leur intersection on peut faire passer un cercle.

L'équation de ce cercle est
$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + \frac{b^2}{a^2}(X - \alpha) - (\beta - Y) = 0.$$

Il passe par le point M, et en ce point il est bien tangent à l'ellipse.

Lorsque le point M décrit l'ellipse, le centre du cercle devient l'ellipse
$$b^2a^2x^2 + (a^2 + c^2)^2y^2 = \frac{(a^2 + c^2)^2}{4} b^2.$$

P. Puig, professeur au lycée de Belfort.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École normale supérieure (1890).

Questions de M. Raffy.

27. — Construire la courbe $y = x - a \sin x$. — Cas de $a = \sqrt{2}$.

28. — Calculer $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2 + 1)(2x^2 + 1)}$ et $\displaystyle\int \frac{(x^2 + 1)dx}{(x^2 + 2)(2x^2 + 1)}$.

29. — Construire la courbe $(x^2 - a^2)^2 - 2ay^2 - 3a^2y^2 = 0$.

30. — Lieu des normales à une surface réglée le long d'une génératrice rectiligne.

31. — Trouver une fonction y telle que $y + y'' = 0$.

32. — Lieu du sommet d'un angle dont les côtés et la bissectrice passent par des points fixes.

33. — Construire la courbe $\rho^2 = 2\rho \cos \omega - \sin^3 \omega$.

34. — Équation générale et lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle rectangle. — Peut-on voir *a priori* quel est le degré du lieu des centres?

35. — Étant données les surfaces $\dfrac{x^2}{a^2 + \lambda} + \dfrac{y^2}{b^2 + \lambda} + \dfrac{z^2}{c^2 + \lambda} - \mu = 0$, le cône des six normales issues d'un point est le même pour toutes ces surfaces, et une quelconque des génératrices de ce cône est normale à une infinité de surfaces représentées par cette équation.

36. — Lieu des pôles des cordes d'une parabole telles que les normales à leurs extrémités se coupent sur la parabole.

37. — Lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée.

38. — Résolution de l'équation complète du troisième degré, quand les trois racines sont en progression géométrique.

39. — Limite de $\dfrac{\operatorname{tg} \pi x - \pi x}{x^2 \operatorname{tg} \pi x}$ pour $x = 0$.

40. — Résoudre l'équation $x^3\sqrt{2} - (3x^2 + 2) \operatorname{tg} 2a = 0$.

41. — Lieu des points équidistants de deux droites, dans l'espace. Ce lieu est un paraboloïde. — Réciproquement, étant donné un paraboloïde, peut-on trouver un couple de droites telles que ce paraboloïde soit le lieu des points équidistants des deux droites? — Y aura-t-il un ou plusieurs couples de droites? — Quel sera le lieu de ces couples de droites? — Étudier ce lieu et les sections par des plans parallèles aux bissectrices de l'angle des deux droites et à leur perpendiculaire commune.

42. — Comment exprime-t-on que l'équation $x^3 + px^2 + q = 0$ a deux racines dont la différence est a? La condition cherchée est $a^2(p^2 - a^2)^2 + q(4p^3 + 27q^2)^2 = 0$; remplacer dans cette équation p et q par x et y et construire la courbe représentée par l'équation ainsi obtenue. — Construire la courbe dans le cas $a = 2$.

43. — Sections circulaires de la surface $x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 2axz + z = 0$.

Ajouter à l'énoncé de la question 26, ces mots : *en supposant que les racines de l'équation* $f(x) = 0$ *sont inégales.*

CONCOURS DE 1890

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Cours préparatoires.

Géométrie analytique.

22. — Étant donné un cercle fixe C dont le centre est en un point de l'axe des y, et une série de circonférences tangentes à l'axe des x à l'origine, on mène des tangentes communes à ces circonférences et au cercle fixe, et on demande le lieu des points de contact M.

On examinera en particulier le cas où le cercle fixe se réduit à un point et celui où le centre de ce cercle coïncide avec l'origine.

(Durée de l'épreuve : 4 heures.)

Algèbre.

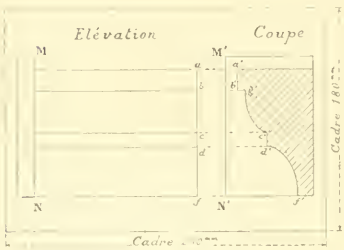
23. — On désigne par x et y les distances AM, BM de deux points A et B à un point M pris arbitrairement sur une droite D.

On demande de déterminer les maximum et minimum du rapport $\frac{y}{x}$.

(Durée : 3 heures.)

Lavis (Feuille 1/8 grand-aigle.)

MOULURES.



Laver à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues, à volonté, les moulures dont le croquis est donné ci-contre.

MN, M'N' est l'arête verticale d'un pilastre, portant ombres à 45° sur les moulures horizontales situées en arrière et dans la position relative qu'indique la coupe.

Les profils $g'c'$ et $d'f'$ pourront être formés par des quarts d'ellipse.

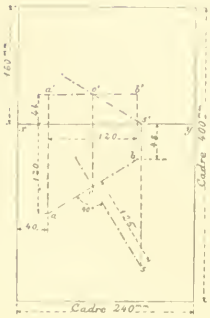
On ne lavera que l'élévation, ombres propres et ombres portées.

Le croquis remis aux candidats était à l'échelle moitié de celle du lavis à exécuter; sur ce croquis, la partie couverte de hachures avait 50mm de hauteur.

(Durée : 3 heures.)

Épure (feuille 1/4 grand-aigle).

CÔNE ET CYLINDRE DE RÉVOLUTION.



24 — Un cylindre de révolution a pour axe la droite horizontale $ab, a'b'$; il est tangent au plan horizontal et il est limité par deux plans de section droite passant par les extrémités a, a' et b, b' de l'axe.

Un cône, également de révolution, a pour sommet le point s, s' situé sur le plan horizontal; son axe passe par le point o, o' milieu de l'axe du cylindre et il est, lui aussi, tangent au plan horizontal En projection horizontale, les axes des deux surfaces sont perpendiculaires l'un sur l'autre.

On demande de chercher l'intersection des deux surfaces et de représenter le cylindre seul en supposant le cône enlevé après avoir fait son entaille dans le cylindre.

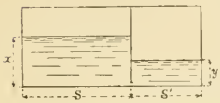
L'épure devra indiquer la marche suivie pour trouver un point courant de l'intersection et la tangente en ce point. Elle comportera également les constructions faites pour trouver les points les plus remarquables de l'intersection.

(Durée : 4 heures.)

Places d'élèves externes.

Analyse et Trigonométrie.

25. — Deux bassins à parois verticales, dont les sections horizontales S et S′ sont connues, sont mis en communication par un orifice dont le débit pendant l'élément de temps dt est proportionnel au produit de dt par la racine carrée de la différence des hauteurs de l'eau dans les deux bassins. Au moment où la communication est établie, le bassin S′ est vide et la hauteur de l'eau dans le bassin S est égale à h. On demande comment varieront en fonction du temps les hauteurs x et y du liquide dans les deux bassins et à quelle époque l'équilibre sera établi.



II. — Dans un triangle ABC, on donne : le côté $BC = a = 928^m,50$, la hauteur $AH = h = 338^m,25$, la médiane $AM = m = 406^m,15$.

On demande de calculer les deux autres côtés et les trois angles.

Résultats : $b = 414^m,414$, $c = 767^m,615$, $B = 26^o\ 8'\ 43'',40$, $C = 54^o\ 42'\ 26'',82$, $A = 99^o\ 8'\ 49'',77$.

(Durée : 3 heures.)

Mécanique.

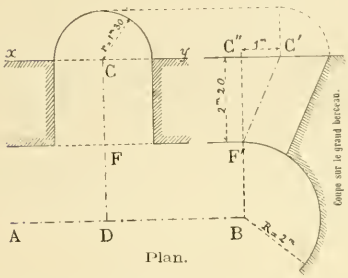
Un point pesant, de masse m, est assujetti à se mouvoir sur une droite OD qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour du point O dans un plan vertical.

On demande de déterminer le mouvement du point m ainsi que la réaction de la droite D.

(Durée : 4 heures.)

Épure de stéréotomie. (Feuille 1/2 grand-aigle.)

DESCENTE DROITE, DANS UN MUR DROIT, ET RACHETANT UN BERCEAU CYLINDRIQUE.



Le grand berceau horizontal a pour axe AB : son rayon est de 2^m.

La descente a pour courbe de tête sur le mur xy une demi-circonférence de $1^m,30$ de rayon; son axe est la droite inclinée CF, C′F′ (voir les cotes sur le croquis ci-contre) Elle sera appareillée normalement, c'est-à-dire que les plans de lit de ses voussoirs devront être normaux au cylindre d'intrados de la descente.

Le nombre des voussoirs, leur épaisseur, le mode d'extradossage (tas de charge ou parallèle) sont laissés au choix des candidats.

On demande, après avoir déterminé l'appareil dans son ensemble et l'intersection des intrados, d'étudier et de représenter complètement un seul voussoir. On donnera les développements et tous les panneaux ou douelles nécessaires pour la taille de ce voussoir.

L'épure sera exécutée sur feuille demi-grand aigle à l'échelle de 5 centimètres pour 1 mètre.

(Durée : 4 heures.)

Croquis et lavis.

Première partie : Croquis (feuille 1/8 grand-aigle).

1° Faire au crayon, à main levée, le relevé géométral (plan, élévation et coupe) de l'un des objets placés dans la salle d'examen (*).

2° Relever les dimensions (en millimètres) et les inscrire sur le croquis.

(On accorde 1 heure 1/2 pour cette première partie du travail, après quoi le modèle en relief est retiré de la salle.)

Deuxième partie : Mise au net et Lavis (feuille 1/4 grand-aigle).

1° Mettre au net, à l'encre de Chine, à une échelle déterminée, le croquis précédent.

2° Laver, à l'encre de Chine, une seule des projections (plan, élévation ou coupe).

(L'échelle est laissée à l'arbitraire de MM. les candidats.)

(Durée totale : 4 heures)

(*) Ces objets étaient : une soupape à boulet pour pompe alimentaire, une glissière de coulisse de Stephenson, une barre d'attelage, un palier pour arbre horizontal ; — un même modèle servait pour quatre candidats.

QUESTIONS PROPOSÉES

26. — Trouver la somme des produits p à p de m termes consécutifs d'une progression géométrique.

*27. — Étant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D; peut-on tracer une parabole passant par les points C et D, dont l'axe passe par A et la tangente au sommet par B?

Montrer qu'en général le problème est impossible. Trouver dans quel cas il est possible, et montrer que dans ce cas il est possible d'une infinité de manières, et trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à toutes ces paraboles, parallèlement à la droite donnée.

*28. — On donne deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, un cercle de centre O et de rayon a et une droite PQ qui passe par le point O et dont le coefficient angulaire est m.

1° Trouver l'équation générale des coniques S qui passent par les points d'intersection de la droite PQ et du cercle O et qui sont tangentes à ce cercle, au point A où il rencontre le demi-axe Ox.

2° Trouver le lieu des centres de toutes ces coniques. Ce lieu est une conique C. Déterminer son centre, ses axes et les tangentes aux points situés sur l'axe des x. Enfin construire cette conique C.

3° Séparer sur la conique C les centres d'ellipse des centres d'hyperbole.

4° Dans l'hypothèse où PQ tourne autour du point O, trouver le lieu du pôle de la droite PQ par rapport à la conique C, puis le lieu du point d'intersection de la droite PQ avec les asymptotes de la conique C, enfin le lieu des sommets et le lieu des foyers de la conique C.

29. — D'un point P du plan d'une ellipse, on mène les quatre normales, et l'on considère le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence.

1° Sur quelle courbe doit être situé le point P pour que le quadrilatère soit circonscriptible à un cercle?

2° Trouver le lieu du centre du cercle inscrit, et le lieu des sommets du quadrilatère, lorsque le point P décrit la courbe précédemment trouvée.

(P. Puig, professeur au lycée de Belfort.)

30. — On considère les coniques circonscrites à un triangle et telles que les normales à ces coniques menées par les sommets du triangle soient concourantes. Lieu de leur point de concours; même question pour les coniques inscrites, les normales étant menées aux points de contact des côtés du triangle.

(J.-G. Darboux, élève au lycée Louis-le-Grand.)

31. — Le volume d'un cône de révolution circonscrit à une sphère, limité par une section elliptique dont le plan est tangent à la sphère, est égal à

$$k\sqrt[3]{P^2},$$

k étant indépendant du plan de base, et P étant le demi-périmètre du triangle section principale du cône.

En déduire le cône minimum circonscrit à une sphère, ou à un ellipsoïde.

Le Rédacteur Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. CHAIX. 23154-10-90.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1890. — 1re Session.)

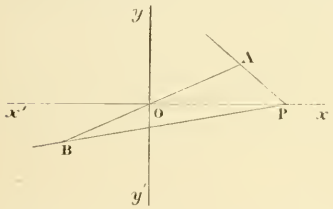
Géométrie analytique.

32. — *On donne deux axes rectangulaires* x'Ox, y'Oy *et deux points* A, B, *symétriques par rapport au point* O.

1° On prend, sur l'axe des x, *un point quelconque* P, *et on considère la parabole* (P) *qui est tangente aux droites* PA, PB *au point* A *et au point* B. *Lieu du sommet et lieu du foyer de cette parabole quand le point* P *parcourt l'axe* x'Ox.

2° On prend, sur l'axe des y, *un point* Q *quelconque, et on considère la parabole* (Q) *qui est tangente aux droites* QA, QB *au point* A *et au point* B. *Les deux paraboles* (P) *et* (Q) *qui correspondent ainsi à un point* P *pris sur* x'Ox *et à un point* Q *pris sur* y'Oy, *se coupent aux points* A, B *et en deux autres points* C, D. *Former l'équation de la droite* CD, *et trouver le lieu décrit par les points* C *et* D *quand les deux points* P *et* Q *se déplacent l'un sur* x'Ox, *l'autre sur* y'Oy, *de façon que l'abscisse du premier soit toujours égale à l'ordonnée du second.*

1° Soient (a, b) et $(-a, -b)$ les coordonnées des points A et B. Désignons par λ l'abscisse du point P. Les équations des droites PA, PB et AB sont respectivement



$$\frac{y}{b} = \frac{x-\lambda}{a-\lambda}, \qquad \frac{y}{-b} = \frac{x-\lambda}{-a-\lambda}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{x}{a},$$

ou encore

$$ay - bx - \lambda(y - b) = 0, \qquad ay - bx + \lambda(y + b) = 0,$$
$$ay - bx = 0.$$

L'équation générale des coniques tangentes en A et B aux droites PA et PB est alors, en désignant par k un paramètre arbitraire,

$$[ay - bx - \lambda(y - b)][ay - bx + \lambda(y + b)] - k(ay - bx)^2 = 0,$$

ou

$$(1 - k)(ay - bx)^2 - \lambda^2(y^2 - b^2) + 2\lambda b(ay - bx) = 0.$$

Cette équation sera celle de la parabole (P) si l'on détermine k de façon que la quantité $B^2 - AC$ soit nulle. On trouve ainsi

$$a^2b^2(1 - k)^2 - b^2(1 - k)[a^2(1 - k) - \lambda^2] = 0$$

ou

$$b^2\lambda^2(1 - k) = 0, \qquad \text{ce qui donne} \qquad k = 1.$$

L'équation de la parabole (P) est donc

$$\lambda(y^2 - b^2) - 2b(ay - bx) = 0,$$

en écartant l'hypothèse $\lambda = 0$, qui correspond à la droite double AB.

Si l'on écrit cette équation sous la forme

$$\frac{\lambda}{2}y^2 - b\left[ay - b\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)\right] = 0,$$

on voit que la parabole (P) a pour diamètre l'axe des x, rencontre ce diamètre au milieu de OP' et a pour tangente en ce point une parallèle à AB. Une propriété géométrique bien connue aurait permis de prévoir ce résultat et pu servir à écrire l'équation de la parabole (P).

Lieu du sommet de la parabole (P). — On sait que l'équation de l'axe d'une parabole, $f(x, y) = 0$, est

$$Bf'_x + Cf'_y = 0.$$

Comme B est nul et que C est différent de zéro, l'axe de la parabole (P) a pour équation

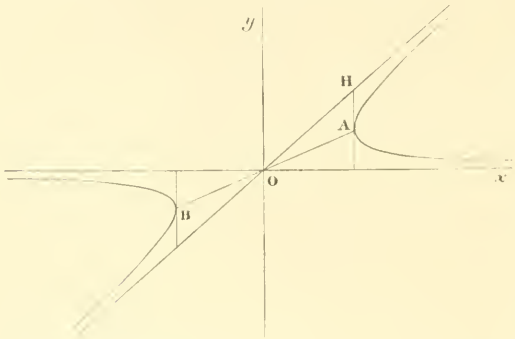
$$f'_y = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \lambda y - ab = 0.$$

Le sommet de cette parabole est donc déterminé par les deux équations

$$\lambda(y^2 - b^2) - 2b(ay - bx) = 0, \qquad \lambda y - ab = 0.$$

Lorsque λ est regardé comme un paramètre variable, ce sommet engendre un lieu dont l'équation s'obtient en éliminant λ entre les deux équations précédentes. On trouve ainsi, après simplification,

$$ay^2 - 2bxy + ab^2 = 0.$$



Le lieu demandé est donc une hyperbole qui a pour centre l'origine. Les asymptotes de cette hyperbole sont les droites

$$y = 0, \qquad ay - 2bx = 0.$$

La première est l'axe des x; la seconde est une droite qui passe par l'origine et qui coupe la parallèle à Oy menée par le point A en un point H dont l'ordonnée est $2b$.

Remarquons enfin que cette hyperbole passe en A et B et que les tangentes en ces points sont parallèles à Oy, car, pour $x = \pm a$, on a $(y \pm b)^2 = 0$.

Ces résultats sont plus que suffisants pour construire la courbe.

Lieu du foyer de la parabole (P). — Le foyer de la parabole (P),

$$f(x, y) = 0,$$

est l'intersection de son axe (voir plus haut)

$$f'_y = 0$$

et de l'hyperbole focale $\qquad 4(A - C)f(x, y) = (f'_x)^2 - (f'_y)^2.$

On aura le lieu de ce point en éliminant λ entre ces deux équations. Remarquons que la dernière équation, en tenant compte de la précédente, se réduit à :

$$4(A - C)f(x, y) = (f'_x)^2.$$

On a donc, en définitive, à éliminer λ entre

$$\lambda y - ab = 0 \quad \text{et} \quad -\lambda[\lambda(y^2 - b^2) - 2b(ay - bx)] = b^4,$$

ce qui donne, après simplification,

$$y^2(a^2 - b^2) - 2abxy + a^2b^2 = 0$$

pour équation du lieu du foyer de la parabole (P).

On voit ainsi que ce lieu est une hyperbole.

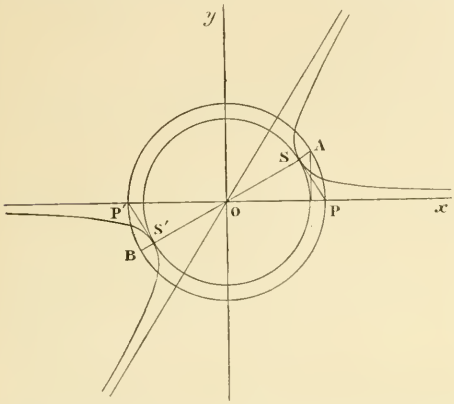
Le centre de cette hyperbole est l'origine. L'équation aux coefficients angulaires de ses axes étant

$$abu^2 + (a^2 - b^2)u - ab = 0,$$

ou encore

$$(au - b)(bu + a) = 0,$$

elle a pour axes la droite AB et la perpendiculaire à cette droite menée par l'origine. D'ailleurs, l'une des asymptotes est l'axe des x, l'autre asymptote est donc la symétrique de Ox par rapport à AB.



Nous pourrons construire cette courbe lorsque nous en connaîtrons un point. Cherchons les points S et S′ où elle coupe AB. Les coordonnées de ces points sont données par

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2};$$

par suite

$$\overline{OS}^2 = a^2.$$

Ainsi, les points S et S′ sont à l'intersection de la droite AB et de la circonférence dont le rayon est la valeur absolue de a. Remarquons que les points S et S′ sont les sommets réels de l'hyperbole considérée.

On pourrait encore obtenir les points S et S′ en cherchant les foyers des deux paraboles (P) pour lesquelles la droite AB est une corde focale, ce qui donne la construction suivante : décrire une circonférence sur AB comme diamètre, prendre les points P et P′ où cette ligne coupe l'axe des x et abaisser de ces points des perpendiculaires sur AB. Les pieds de ces perpendiculaires sont les foyers des deux paraboles (P) et (P′), c'est-à-dire les points de l'hyperbole qui se trouvent sur AB, c'est-à-dire encore les deux sommets réels S et S′ de cette courbe.

2° Désignons par μ l'ordonnée du point Q. L'équation de la parabole (Q) se déduit par analogie de celle de la parabole (P).

L'équation de cette dernière étant

$$(1) \qquad \lambda(y^2 - b^2) - 2b(ay - bx) = 0,$$

celle de la parabole (Q) est

$$(2) \qquad \mu(x^2 - a^2) - 2a(bx - ay) = 0.$$

Équation de la droite CD. — Multiplions les deux membres de l'équation (1) par μa^2, ceux de l'équation (2) par λb^2, et retranchons membre à membre. Nous obtenons l'équation

$$\lambda\mu(a^2y^2 - b^2x^2) - 2ab(ay - bx)(a\mu + b\lambda) = 0,$$

qui est celle d'une conique passant par les quatre points A, B, C, D. Or cette équation s'écrit

$$(ay - bx)[\lambda\mu(ay + bx) - 2ab(a\mu + b\lambda)] = 0,$$

et, par suite, se décompose en deux équations du premier degré,

$$ay - bx = 0 \quad \text{et} \quad \lambda\mu(ay + bx) - 2ab(a\mu + b\lambda) = 0.$$

D'ailleurs, la première de ces équations est celle de la droite AB; il faut donc que la seconde représente la droite CD.

Lieu des points C et D. — Les points C et D peuvent être regardés comme l'intersection de la droite CD avec la parabole (P). Si l'on se rappelle que l'on doit ici supposer $\lambda = \mu$, la question revient à chercher le lieu des points d'intersection des deux lignes représentées par les équations

$$\lambda(ay + bx) - 2ab(a + b) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda(y^2 - b^2) - 2b(ay - bx) = 0.$$

Le paramètre variable étant λ, il suffit d'en faire l'élimination entre les équations précédentes, ce qui donne pour équation du lieu demandé

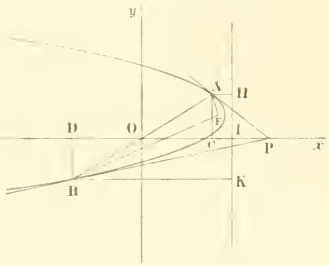
$$\frac{ay + bx}{y^2 - b^2} = \frac{a(a + b)}{ay - bx}.$$

ou

$$bx^2 + ay^2 - ab(a + b) = 0.$$

Cette équation représente une conique à centre rapportée à ses axes. Comme $B^2 - AC = -ab$, cette conique est une ellipse quand les points A et B sont dans les angles (1) et (3), une hyperbole quand ces points sont dans les angles (2) et (4).

Supposons, pour fixer les idées, que le point A soit au-dessus de l'axe des x. Lorsque ce point est dans le premier angle, a et b sont positifs, l'ellipse lieu a pour demi-axes des moyennes proportionnelles entre a et $a + b$ d'une part, b et $a + b$ d'autre part. Dans le cas où le point A est dans le second angle, a est négatif et b positif. Si $(a + b)$ est positif, l'axe des y est l'axe transverse de l'hyperbole lieu et sa demi-longueur est une moyenne proportionnelle entre b et $a + b$. Si $(a + b)$ est négatif, l'axe des x est l'axe transverse et sa demi-longueur est une moyenne proportionnelle entre $-a$ et $-(a + b)$. La considération de l'hyperbole conjuguée fournira sans peine le moyen de construire les asymptotes.



Solution géométrique du lieu du foyer de la parabole (P).

Soit F le foyer de la parabole (P). Les diamètres de cette parabole étant parallèles à Ox, sa directrice est perpendiculaire à cette droite. Soit IH cette directrice.

On a $\qquad FA = AH = CI$

et $\qquad FB = BK = DI,$

d'où $\qquad FB - FA = DI - CI = DC = |2a|.$

Le lieu du point F est une hyperbole dont les foyers sont les points A et B et dont l'axe transverse a pour longueur $|2a|$.

A. T.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1890).

Mathématiques.

Copie couronnée (1er Prix).

33. — *On donne une surface du second ordre* S, *un point fixe* A *sur cette surface et une conique* C *située dans un plan* P.

Les trois droites qui joignent le point A *aux sommets* A_1, A_2, A_3 *d'un triangle* T *situé dans le plan* P *rencontrent respectivement la surface* S *en des points* a_1, a_2, a_3 *autres que* A.

1° Démontrer que le plan $a_1a_2a_3$ *passe par un point fixe* M *quand le triangle* T *se déplace dans le plan* P *en restant conjugué par rapport à la conique* C.

2° Trouver le lieu décrit par le point M *quand la conique* C *varie en restant circonscrite à un quadrilatère donné.*

3° Trouver le lieu décrit par le même point M *quand la conique* C *varie en restant inscrite dans un quadrilatère donné.*

Prenons pour tétraèdre de référence un tétraèdre ayant pour sommet le point A et pour base un triangle HKL dans le plan P; les faces $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ concourant au point A, et la face $t = 0$ étant le plan P.

L'équation de la conique C rapportée au triangle HKL dans le plan P peut s'écrire

$$K = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0.$$

Son équation tangentielle s'écrit alors

$$K' = \alpha u^2 + \alpha' v^2 + \alpha'' w^2 + 2\beta vw + 2\beta' wu + 2\beta'' uv = 0,$$

en posant

$$\alpha = a'a'' - b^2, \qquad \alpha' = \ldots \qquad \alpha'' = \ldots$$

$$\beta = b'b'' - ab, \qquad \beta' = \ldots \qquad \beta'' = \ldots$$

Soit, d'autre part,

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2t(Cx + C'y + C''z) = 0$$

l'équation de la surface S.

1° Soit

$$ux + vy + wz = t$$

l'équation de l'un des plans $a_1 a_2 a_3$.

L'équation du cône ayant pour sommet A et pour base l'intersection de ce plan avec S, est

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2(ux + vy + wz)(Cx + C'y + C''z) = 0.$$

Cette même équation sera celle de l'intersection du cône considéré avec le plan P, rapportée au triangle HKL.

La condition pour que l'on puisse inscrire dans cette conique (1) un triangle conjugué par rapport à la conique C, est qu'un certain invariant du système des équations (1) et $K = 0$ soit nul. Cet invariant, désigné souvent par Θ (voir Salmon), s'obtient en remplaçant dans l'équation (1)

$$x^2, \quad y^2, \quad z^2, \quad yz, \quad zx, \quad xy$$

par

$$\alpha, \quad \alpha', \quad \alpha'', \quad \beta, \quad \beta', \quad \beta''.$$

En l'égalant à 0, on obtient

$$(A+2Cu)\alpha+(A'+2C'v)\alpha'+(A''+2C''w)\alpha''+2\beta(C''v+C'w+B)+2\beta'(C''u+Cw+B')+2\beta''(C'u+Cv+B'')=0.$$

Cette relation est du premier degré entre u, v et w; elle exprime que le plan $ux + vy + wz = t$ passe par un point fixe M.

Les coordonnées de ce point fixe sont egales aux coefficients de u, v et w, et au terme indépendant de ces variables changé de signe; ce sont

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = 2(C\alpha + C''\beta' + C'\beta''), \\ y_1 = 2(C'\alpha' + C''\beta + C\beta''), \\ z_1 = 2(C''\alpha'' + C'\beta + C\beta'), \\ t_1 = -(A\alpha + A'\alpha' + A''\alpha'' + 2B\beta + 2B'\beta' + 2B''\beta''). \end{cases}$$

On voit que t_1 est nul, c'est-à-dire que le point M est situé dans le plan P, si la conique d'intersection de S avec P, conique d'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

est circonscrite à un triangle conjugué par rapport à la conique C.

Dans ce cas, le plan P est l'un des plans $a_1\, a_2\, a_3$.

2° Supposons que la conique C varie en restant circonscrite à un quadrilatère fixe.

Soient $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ les équations de deux des coniques circonscrites à ce quadrilatère ; on aura

$$K = K_1 + \lambda K_2 \quad \text{et. par suite,} \quad a = a_1 + \lambda a_2, \quad a' = \ldots \quad a'' = \ldots$$

D'autre part,

$$\alpha = a'a'' - b^2, \qquad \beta = b'b'' - ab,$$
$$\alpha' = \ldots \qquad \beta' = \ldots$$
$$\alpha'' = \ldots \qquad \beta'' = \ldots$$

Si l'on remplace $a, a', a'', \ldots$ par les valeurs $a_1 + \lambda a_2, \ldots$ dans ces dernières égalités, puis que l'on substitue les valeurs de $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ ainsi trouvées dans les égalités (2), on voit que x_1, y_1, z_1, t_1 sont, dans ce cas, fonctions du second degré d'un paramètre variable λ, et que, par suite, le lieu du point M est une conique.

3° Supposons que la conique C varie en restant inscrite à un quadrilatère fixe. Soient $K'_1 = 0$, $K'_2 = 0$ les équations tangentielles de deux des coniques inscrites à ce quadrilatère. On aura

$$K' = K'_1 + \lambda K'_2 \quad \text{et, par suite,} \quad \alpha = \alpha_1 + \lambda\alpha_2, \quad \alpha' = \ldots \quad \alpha'' = \ldots \quad \beta = \beta_1 + \lambda\beta_2, \quad \beta' = \ldots \quad \beta'' = \ldots$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les égalités (2), on voit que x_1, y_1, z_1, t_1 sont, dans ce cas, fonctions du premier degré d'un paramètre variable λ, et que, par suite, le lieu du point M est une droite.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

1° Transformons homographiquement la figure donnée de manière que la conique C devienne le cercle de l'infini. Le transformé d'un trièdre $A(A_1A_2A_3)$ quelconque sera un trièdre trirectangle, et par suite (théorème de Frégier étendu à l'espace), le transformé du plan $a_1a_2a_3$ passera par un point fixe; donc le plan $a_1a_2a_3$ lui-même passe par un point fixe.

Ce point, dans la figure transformée, est sur la normale à la surface au point A, c'est-à-dire sur la polaire du plan tangent en A à la surface par rapport au cône ayant pour sommet A et pour base le cercle de l'infini; dans la figure donnée, il sera sur la polaire du plan T tangent en A à la surface S par rapport au cône ayant pour sommet A et pour base C. Soient M_1 le point de rencontre de AM avec le plan P et D la droite d'intersection des plans T et P. M_1 est le pôle de D par rapport à C.

2° Quand C varie en restant circonscrit à un quadrilatère fixe, M_1 décrit une conique (il y a deux points du lieu de M_1 sur la droite D, ce sont les points de contact des deux coniques circonscrites au quadrilatère et tangentes à D). Donc AM décrit un cône du second ordre.

D'autre part, le triangle diagonal du quadrilatère est conjugué par rapport à toutes les coniques du faisceau. Donc le point M reste constamment dans le plan $a_1a_2a_3$ correspondant.

Le lieu du point M sera, en conséquence, l'intersection de ce plan et de ce cône, c'est-à-dire une conique.

3° Quand C varie en restant inscrit à un quadrilatère fixe, M_1 décrit une droite (il y a un point du lieu de M_1 sur D, c'est le point de contact de la conique inscrite au quadrilatère et tangente à D).

Donc AM décrit un plan. — Le lieu sera l'intersection de deux plans, c'est-à-dire une droite.

Remarque. — L'énoncé peut être modifié de la façon suivante :

1° Quand un plan varie en coupant constamment la surface S *suivant une conique circonscrite à un triangle conjugué par rapport à sa section par le cône* A(C), *il passe par un point fixe* M ;

2° Quand le cône A(C) *se déforme en passant par quatre génératrices fixes, le point* M *décrit une conique;*

3° Quand le cône A(C) *se déforme en restant tangent à quatre plans fixes, le point* M *décrit une droite.*

Cela résulte de ce que les propriétés relatives aux polaires dans la théorie des coniques sont projectives.

Louis Ravier (Lycée Condorcet).

NOTE

Dans la solution géométrique de M. Ravier, il a été fait usage du théorème suivant :

La normale en un point A *d'une surface est la polaire du plan tangent en* A *à cette surface, par rapport au cône qui a pour sommet le point* A *et pour base le cercle de l'infini.*

Nous allons montrer comment on établit cette proposition.

On sait que le plan polaire d'un point M par rapport à un cône du second degré est un plan P passant par le sommet S du cône; ce plan reste invariable quand le point M se déplace sur une droite fixe passant par le sommet S; on dit, pour cette raison, que la droite SM est la polaire du plan P par rapport au cône considéré.

Étant donné un plan P et une droite SM passant l'un et l'autre par le sommet S d'un cône du second degré, il est facile de reconnaître si SM est la polaire de P. Pour cela faisons passer par SM un plan sécant quelconque, qui coupera le cône suivant deux génératrices SA, SB et le plan P suivant une droite SC; pour que SM soit la polaire de P, il faut et il suffit que les droites SC et SM soient conjuguées harmoniques par rapport à SA et SB, quel que soit le plan sécant. Cela résulte immédiatement de la définition de la polaire.

Cela posé, considérons deux axes rectangulaires Ox, Oy. On sait que la condition pour que les droites représentées par l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites définies par l'équation

$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0,$$

est

$$AC' + CA' - 2BB' = 0.$$

Si le second faisceau devient le *faisceau isotrope* représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 = 0,$$

c'est-à-dire, si l'on suppose $B' = 0$, $A' = C' = 1$,

la *condition d'harmonie* devient

$$A + C = 0.$$

Or cette condition exprime que le premier faisceau est formé de deux droites rectangulaires.

Il résulte de là que pour exprimer que deux droites concourantes sont rectangulaires, il suffit d'exprimer qu'elles sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites isotropes menées par le point de concours des deux droites données et dans leur plan.

Cela posé, *toutes les droites isotropes menées par un point* A *sont sur un cône du second degré que l'on nomme le cône isotrope de sommet* A, et que l'on peut définir comme un cône ayant pour directrice le *cercle de l'infini* et pour sommet le point A.

Cette proposition est facile à établir. En effet, considérons un plan quelconque passant par le point A. Prenons trois axes rectangulaires passant par ce point, le plan des xy étant précisément le plan considéré. Il passe par le point A, dans le plan des xy, deux droites isotropes représentées par l'équation $x^2 + y^2 = 0$. Ces droites peuvent être considérées comme étant situées dans le plan des xy et sur le cône représenté par l'équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Or on sait que si l'on remplace le système d'axes rectangulaires considéré par un autre système, également trirectangle et ayant même origine, l'expression $x^2 + y^2 + z^2$ reste invariable, de sorte que si (x, y, z) sont les coordonnées d'un point M dans le premier système, et (x', y', z') celles du même point dans le second système, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

d'où il résulte que l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

dans le nouveau système d'axes, représente le même cône que l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

dans le premier système. Le nouveau plan des xy coupe le cône suivant deux droites isotropes. Il faut en conclure que tout plan passant par A coupe le cône de sommet A et représenté par l'équation (1) suivant deux droites isotropes et que toute droite isotrope passant par A est sur ce cône.

Or l'équation (1) peut être également considérée comme représentant une sphère de rayon nul; cette sphère est coupée par le plan de l'infini, qui a, par définition, pour équation $t = 0$, suivant un cercle défini par les deux équations

$$(2) \qquad t = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Considérons maintenant un point M de coordonnées a, b, c. Le cône isotrope de sommet M, a pour équation, en coordonnées homogènes,

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 + (z - ct)^2 = 0.$$

Le plan de l'infini coupe donc ce cône suivant le cercle défini par les équations (2).

Une sphère de rayon quelconque est coupée par le plan de l'infini suivant le même cercle. En résumé, toutes les sphères peuvent être considérées comme ayant en commun un même cercle situé à l'infini et nommé le cercle de l'infini; et en disant ces mots, on entend que si dans l'équation d'une sphère en coordonnées homogènes on pose $t = 0$, on obtient $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. (Les axes étant supposés rectangulaires, pour plus de simplicité.)

Cela posé, soit A un point d'une surface. Si par la normale AN en A on mène un plan quelconque, ce plan coupe le plan tangent suivant une droite AB perpendiculaire à AN. Les droites AB et AN sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites isotropes menées par A dans le plan sécant, c'est-à-dire, par rapport aux génératrices du cône isotrope de

sommet A qui sont dans le plan sécant. Donc la normale AN est bien la polaire du plan tangent par rapport au cône isotrope de sommet A, c'est-à-dire par rapport au cône ayant pour sommet le point A et pour directrice le cercle de l'infini.

On peut d'ailleurs vérifier très simplement la proposition par le calcul.

Rapportons la surface à trois axes rectangulaires passant par le point A, l'axe des z étant la normale en A à la surface. Le plan polaire de l'axe des z par rapport au cône qui a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

est représenté par l'équation $z = 0$, et par suite est le plan tangent en A.

Physique.

Copie couronnée (1er Prix).

34. — *Avant les mesures précises, on pouvait hésiter, pour représenter la loi de la réfraction, entre la formule* $\sin i = n \sin r$ *et des formules analogues telles que* $i = nr$, $tg\, i = n\, tg\, r$. *Reprendre complètement la théorie du prisme en substituant ces dernières formules à la formule exacte. Reconnaître, en particulier, si la propriété du minimum de déviation subsiste toujours et déterminer le foyer du prisme.*

I. — LOI SUPPOSÉE VRAIE : $i = nr$.

RÉFRACTION A TRAVERS UNE SEULE SURFACE PLANE

$$i = 0, \qquad r = 0$$

$$i = \frac{\pi}{2}, \qquad r = \frac{\pi}{2n} \qquad \left(60^\circ \text{ pour } n = \frac{3}{2}\right).$$

Il y a donc un angle limite comme dans la réalité : au delà de cet angle limite, les rayons sortant du milieu le plus dense peuvent subir la réflexion totale. — La déviation d'un rayon est

$$i - r = i\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

variable avec l'incidence et augmentant avec elle.

DÉVIATION PAR LE PRISME

Les équations du prisme, qui sont ici

$$i = nr, \qquad i' = nr', \qquad r + r' = A, \qquad \Delta = i + i' - A.$$

(A étant l'angle du prisme), donnent immédiatement

$$\Delta = (n - 1)A.$$

Fait caractéristique de cette loi : la déviation est une constante quelle que soit l'incidence.

La condition d'émergence à la seconde face est

$$r' \leqslant \frac{\pi}{2n} \qquad \text{ou} \qquad r \geqslant A - \frac{\pi}{2n},$$

ce qui donne

$$(1) \qquad i \geqslant nA - \frac{\pi}{2}.$$

Donc, pour un point I, les rayons émergents sont :

avec $A = 0$, le faisceau entier, d'ouverture AIM ;

avec $A = \frac{\pi}{2n}$, le faisceau NIM ;

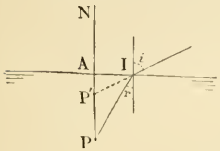
avec $A = \frac{\pi}{n}$, le rayon MI seul.

Pour $A \geqslant \frac{\pi}{n}$, le prisme est donc à réflexion totale, quelle que soit l'incidence. Pour $n = \frac{3}{2}$, cela donne $A = 120^\circ$, angle plus grand que dans la réalité (86°).

Foyer du prisme.

Considérons d'abord les lignes focales d'un point par rapport à une seule surface.

Première ligne focale. — Donnée par les rayons de même incidence. Posons $PA = d$, $P'A = d'$.



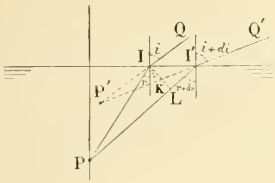
On trouve $$d' = d\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i} = d\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} nr}.$$

Si les rayons tombent presque normalement, r étant très petit, on peut prendre

$$(1) \qquad d' = d\frac{r}{i} = \frac{d}{n}.$$

D'autre part, on a $$\begin{cases} P'I = p' = \dfrac{IA}{\sin i} \\ PI = p = \dfrac{IA}{\sin r} \end{cases} \qquad p' = p\frac{\sin r}{\sin i} = p\frac{\sin r}{\sin nr}.$$

Deuxième ligne focale. — Considérons deux rayons d'incidence voisine PIQ, PI'Q'. Soient r, i, $r + dr$, $i + di$ les angles correspondants. La figure donne



$$IK = IP' \sin(di) = II' \cos(i + di),$$
$$IL = IP \sin(dr) = II' \cos(r + dr),$$

d'où, en passant à la limite,

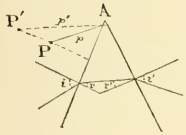
$$\frac{IP'}{IP} = \frac{\cos i}{\cos r}\frac{dr}{di} = \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r}.$$

Posons $IP' = p_1$, $IP = p$.

$$(2) \qquad p_1 = \frac{p}{n}\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{p}{n}\frac{\cos nr}{\cos r}.$$

Un point donne donc deux lignes focales situées à des distances différentes du point d'incidence.

Passons maintenant au prisme. — Considérons seulement des rayons qui, partis de P, tombent très près du sommet A, de façon qu'on puisse négliger le trajet dans le verre.



Première ligne focale. — Avec les notations usuelles indiquées sur la figure, et n étant l'indice du verre, la première face donne un point P' tel que $p' = p\dfrac{\sin i}{\sin r}$;

La deuxième face remplace ce point P' par P'' :

$$(1) \qquad p'' = p'\frac{\sin r}{\sin i'} = p\frac{\sin i \sin r'}{\sin r \sin i'}.$$

Deuxième ligne focale. — La première face donne une image à la distance $p_1 = pm\dfrac{\cos r}{\cos i}$.

La deuxième face la remplace par P_2 défini par $p_2 = p_1\dfrac{1}{n}\dfrac{\cos i'}{\cos r'}$ ou enfin

$$(2) \qquad p_2 = p\frac{\cos r}{\cos i}\frac{\cos i'}{\cos r'}.$$

Comparons les distances des lignes focales (1) et (2). En général $\dfrac{p''}{p_2} = \dfrac{\sin 2i \sin 2r'}{\sin 2r \sin 2i'}$.

Ce rapport dépend de l'angle i, excepté dans le cas où $i = i'$.

On a alors $p'' = p_2$. Les deux lignes focales se croisent; il en résulte un point qui forme la partie la plus lumineuse de la caustique : c'est le *foyer du prisme*.

On peut encore examiner quelques cas particuliers, et faire varier i entre les limites $\frac{\pi}{2}$ et $nA - \frac{\pi}{2}$:

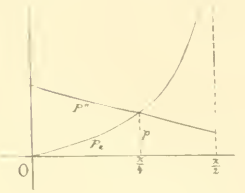
$$i = \frac{\pi}{2}; \qquad p'' = -p\,\frac{\sin\left(A - \frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\frac{\pi}{2n}\cos nA} \qquad p_2 = \infty.$$

$$i = 0; \qquad p'' = p\,\frac{n\sin A}{\sin nA} \qquad p_2 = p\,\frac{\cos nA}{\cos A}$$

$$i = nA - \frac{\pi}{2}; \qquad p'' = -p\,\frac{\cos nA\,\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(A - \frac{\pi}{2n}\right)} \qquad p_2 = 0.$$

Le produit des valeurs limites de p'' est p^2. Les lignes focales sont toujours virtuelles.

N. B. — Dans le cas usuel, $A = \frac{\pi}{3}$, $n = \frac{3}{2}$, $\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{3}$, $nA = \frac{\pi}{2}$, $A - \frac{\pi}{2n} = 0$.



Les valeurs limites de p'' se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; mais si l'on fait tendre $A - \frac{\pi}{2n} = \varepsilon$ vers 0, on voit que pour la première

$$p'' = p\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin n\varepsilon},$$

qui, à la limite, devient $p'' = +p\,\frac{1}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{1}{n} = \frac{4p}{3\sqrt{3}}$.

La deuxième est $p'' = +p\,\frac{3\sqrt{3}}{4}$, confondue d'ailleurs avec celle que donne $i = 0$.

On peut se rendre compte de la variation de p'' et de p_2 au moyen de la courbe ci-contre relative à ce cas.

II. — LOI SUPPOSÉE VRAIE : $\operatorname{tg} i = n \operatorname{tg} r$.

RÉFRACTION A TRAVERS UNE SURFACE PLANE UNIQUE

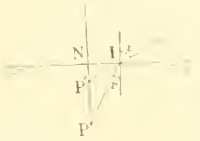
Pour $i = 0$, $r = 0$ et $\Delta = 0$. Pour $i = \frac{\pi}{2}$, $r = \frac{\pi}{2}$: le rayon rasant n'est pas non plus dévié. — Au retour, pas d'angle limite, puisque, quel que soit r, on trouve toujours une valeur de i.

Ainsi donc, première caractéristique : pas de réflexion totale par une seule surface

Posons
$$\begin{cases} \operatorname{tg} i = n \operatorname{tg} r, \\ \Delta = i - r. \end{cases}$$

et cherchons le *maximum de* Δ. On trouve facilement qu'il est réalisé pour $\operatorname{tg} i = \sqrt{n}$ (soit, pour l'indice $\frac{3}{2}$, $i = 50^\circ$). — C'est une deuxième caractéristique.

Image donnée par une seule surface. — Il y a ici *image* nette. En effet, un rayon quelconque PI passe après réfraction par le point P′ tel que $PN = nP'N$,



car on a $\qquad NI = P'N \operatorname{tg} i = PN \operatorname{tg} r, \qquad nP'N = PN.$

Un point lumineux P donne donc ici une image véritable P′.

ÉTUDE DE LA DÉVIATION PAR LE PRISME

Limite d'incidence. — Il n'y a pas de réflexion totale possible. Mais comme les rayons doivent rencontrer la deuxième face, on a la condition unique

$$r' < \frac{\pi}{2} \qquad \text{d'où} \qquad r > A - \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\operatorname{tg} i > -n \operatorname{cotg} A. \tag{1}$$

Déviation. — Les équations du prisme

$$(2)\qquad \left.\begin{cases} \Delta = i + i' - A \\ r + r' = A \\ \operatorname{tg} i = n \operatorname{tg} r \\ \operatorname{tg} i' = n \operatorname{tg} r' \end{cases}\right\} \text{ donnent par différentiation } \begin{cases} 1 + \dfrac{di'}{di} = \dfrac{d\delta}{di} \\ \dfrac{dr}{di} + \dfrac{dr'}{di} = 0 \\ \dfrac{1}{\cos^2 i} = \dfrac{n}{\cos^2 r} \cdot \dfrac{dr}{di} \\ \dfrac{1}{\cos^2 i'} \cdot \dfrac{di'}{di} = \dfrac{n}{\cos^2 r'} \cdot \dfrac{dr'}{di}. \end{cases}$$

Éliminant $\dfrac{di'}{di}$, $\dfrac{dr'}{di}$, $\dfrac{dr}{di}$, on trouve

$$\frac{d\delta}{di} = 1 - \frac{\cos^2 i' . \cos^2 r}{\cos^2 r' . \cos^2 i} = \frac{(n^2 - 1)(\operatorname{tg}^2 i' - \operatorname{tg}^2 i)}{(1 + \operatorname{tg}^2 r)(1 + \operatorname{tg}^2 i')}.$$

Cette dérivée ne s'annule que pour $i = \pm i'$. La solution $i = -i'$ est à rejeter, comme entraînant $A = 0$. Donc une seule solution : $i = i'$.

Pour voir s'il y a maximum ou minimum, prenons la dérivée seconde; en tenant compte des équations aux dérivées premières, on trouve aisément

$$\frac{d^2\delta}{di^2} = \frac{2 \cos i' \cos^2 r}{n \cos^3 r' \cos^3 i} [\cos r \cos i' \sin (r + r') - n \cos i \cos r' \sin (i + i')],$$

qui devient, pour $i = i'$,

$$\frac{d^2\delta}{di^2} = \frac{2(\sin A - n \sin 2i)}{n \cos^2 i} \quad \text{que l'on peut écrire} \quad \frac{d^2\delta}{di^2} = \frac{2 \operatorname{tg} r(1 - n^2)}{n(1 + \operatorname{tg}^2 r)}.$$

Cette expression a le signe de $(1 - n^2)$.

Donc si $n > 1$, il y a *maximum de déviation*.

si $n < 1$, il y a *minimum de déviation;* mais $\delta < 0$, c'est-à-dire qu'il y a maximum de la valeur absolue de δ.

C'est le contraire qui a lieu avec la loi des sinus. Ce serait là une troisième caractéristique de la loi étudiée.

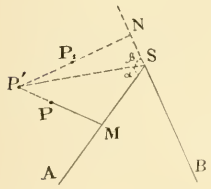
Foyer du prisme.

On a vu plus haut que tous les rayons partis d'un point P se comportent à l'intérieur du prisme comme s'ils venaient exactement du point P′ tel que

$$P'M = nPM.$$

En repassant dans l'air, tous ces rayons se comporteront comme s'ils venaient de P_1 défini par

$$P_1N = \frac{1}{n} P'N.$$



On voit sur la figure que

$$P'S = \frac{P'M}{\sin \alpha} = \frac{P'N}{\sin \beta}, \qquad \text{d'où} \qquad P'N = nPM \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

et

$$P_1N = PM \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

P. Caltaux,

Élève du lycée Louis-le-Grand (M. Leduc, professeur).

On remarquera que non seulement le prisme serait, dans cette hypothèse, un instrument aplanétique, mais que les images de diverses couleurs d'un point P se trouvent à une même distance de la face de sortie, car P_1N est indépendant de l'indice.

On verrait donc un spectre net (c'est-à-dire dont toutes les couleurs seraient simultanément au point) en disposant la lunette du spectroscope normalement à la face de sortie, quelle que soit la position de la fente

Considérons maintenant un pinceau lumineux traversant le prisme au voisinage du sommet, et désignons comme plus haut par p, p', p'' les distances du point et des images au prisme, comptées sur les rayons.

On a
$$p' = p\,\frac{\sin i}{\sin r}, \qquad p'' = p'\,\frac{\sin r'}{\sin i'} = p\,\frac{\sin r' \sin i}{\sin i' \sin r}.$$

On voit de suite que pour $i = i'$ (maximum de déviation) on a $p'' = p$.

Le spectre serait donc encore vu nettement si l'appareil était disposé de façon que $i = i'$.

On peut se proposer d'examiner les variations de p''. On trouve que
$$\left(\frac{p''}{p}\right)^2 = \frac{1}{4n^2}\left[(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2 \cos 2A + 2(n^4-1)\sin^2 A \cos 2i - 2n(n^2-1)\sin^2 A . \sin 2i.\right]$$

On remarque les valeurs particulières :

Pour
$$i = \frac{\pi}{2}, \qquad \left(\frac{p''}{p}\right)^2 = 1 - \frac{n^2-1}{n^2}\sin^2 A;$$
—
$$i = 0, \qquad \left(\frac{p''}{p}\right)^2 = 1 + (n^2-1)\sin^2 A.$$

Si, de plus, $A = \frac{\pi}{2}$, cette dernière incidence devient incidence limite et l'on a simplement
$$i = \frac{\pi}{2}, \qquad p'' = \frac{p}{n},$$
$$i = 0, \qquad p'' = pn.$$

La dérivée de $\left(\frac{p''}{p}\right)^2$ par rapport à $2i$ est
$$\frac{d\left(\frac{p''}{p}\right)^2}{d.2i} = -\frac{1}{2n^2}\left[(n^4-1)\sin^2 A \sin 2i + n(n^2-1)\sin 2A \cos 2i\right];$$
elle s'annule pour
$$\operatorname{tg} 2i_1 = -\frac{2n}{n^2+1}\operatorname{cotg} A.$$

Cette équation est satisfaite pour deux valeurs de i_1 comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Soit α le plus petit angle en valeur absolue, tel que
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2n}{n^2+1}\operatorname{cotg} A.$$

On a les deux solutions (directions rectangulaires)
$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \alpha \\ i_1' &= \alpha + \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{ si } \operatorname{cotg} A > 0, \text{ c'est-à-dire si } A < \frac{\pi}{2}$$
et
$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \alpha \\ i_1' &= \alpha - \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \text{ si } \operatorname{cotg} A < 0, \text{ c'est-à-dire si } A > \frac{\pi}{2}.$$

La dérivée seconde est
$$\frac{d^2\left(\frac{p''}{p}\right)^2}{d(2i)^2} = -\frac{(n^2-1)\sin A}{2n^2}\left[\pm\sqrt{(n^2-1)^2\sin^2 A + 4n^2}\right].$$

Le signe du radical est celui que l'on a dû prendre dans l'expression
$$\sin 2i_1 = \frac{-2n\cos A}{\pm\sqrt{(n^2-1)^2\sin^2 A + 4n^2}}.$$

Le signe + convient pour la valeur désignée par α, le signe — pour $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ ou $\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

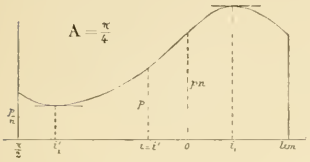
Soit que
$$A < \frac{\pi}{2} \qquad (\operatorname{cotg} A > 0,\ \alpha > 0),$$
ou que
$$A > \frac{\pi}{2} \qquad (\operatorname{cotg} A < 0,\ \alpha < 0).$$
la valeur α correspond toujours au maximum de $\frac{p''}{p}$. Il y a minimum pour l'autre valeur.

Il reste à savoir si ce maximum et ce minimum existent physiquement.

Soit i_2 l'incidence limite; on a $\operatorname{tg} 2i_2 = \dfrac{-2n \operatorname{cotg} A}{1 - n^2 \operatorname{cotg}^2 A}$.

En comparant cette valeur à celles qui précèdent on voit que :

Si $A < \frac{\pi}{2}$, les deux valeurs α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$, sont $> i_2$, c'est-à-dire que le maximum et le minimum existent physiquement;

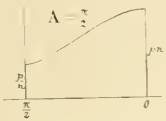


Si $A > \frac{\pi}{2}$, il n'y a au contraire ni maximun ni minimum.

Pour $A = \frac{\pi}{2}$, $i_2 = i_1 = 0$; le maximum et le minimum s'évanouissent simultanément : la courbe coupe orthogonalement les ordonnées corrrespondant à 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Les courbes ci-contre concernent les cas de

$$A = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad A = \frac{\pi}{2}, \quad n = \frac{3}{2}.$$



$$A = 45^\circ \begin{cases} \text{Maximum de déviation} & 31^\circ\,51' \\ \text{Incidence limite} & -56^\circ\,18' \\ \text{Maximum de } p'' & i_1 = -21^\circ\,21' \\ \text{Minimum} & i_1' = +68^\circ\,39'. \end{cases}$$

N. B. — Chacun des faits caractéristiques rencontrés dans la discussion aurait suffi à faire rejeter *a priori* les deux lois que nous avons examinées : de là une confirmation de la loi de Descartes.

(A. Leduc.)

ALGÈBRE

8. — *Démontrer l'identité*

$$x^n - C_n^1(x-1)^n + C_n^2(x-2)^n + \ldots + (-1)^n C_n^n(x-n)^n = n!$$

Considérons la fonction $f(u) = u^n$; donnons à u les valeurs de la suite

$$x - n, \quad x - n + 1, \ldots, x - 1, \quad x;$$

$f(u)$ prend $n + 1$ valeurs dont la différence n^{me} est donnée par la formule

$$\Delta_n f(u) = x^n - C_n^1(x-1)^n + C_n^2(x-2)^n - \ldots + (-1)^n C_n^n(x-n)^n.$$

Comme d'autre part la différence n^{me} de u^n est $n!$, la formule est établie.

H. de Montille.

9. — *Démontrer l'identité*

$$x^p - C_n^1(x-1)^p + C_n^2(x-2)^p + \ldots + (-1)^n C_n^n(x-n)^p = 0.$$

en supposant $p < n$.

Considérons la fonction $f(u) = u^p$, et donnons à u les valeurs de la suite

$$x - n, \quad x - n + 1, \ldots x;$$

la différence n^{me} des $n + 1$ valeurs que prend $f(u)$ a pour expression

$$x^p - C_n^1(x-1)^p + C_n^2(x-2)^p - \ldots + (-1)^n C_n^n(x-n)^p;$$

mais la différence n^{me} de u^p est nulle, puisque $p < n$; l'identité est donc démontrée. — Cette formule s'obtient aussi en dérivant $n - p$ fois les deux membres de l'identité du n° 8.

H. de Montille.

Ont envoyé des solutions analogues (questions n°s 8 et 9) : MM. J.-G. Darboux et Randon, élèves du lycée Louis-le-Grand; Perree (lycée Condorcet).

Un abonné établit la première identité sans s'appuyer sur la théorie des différences. En désignant le premier membre par $F(x, n)$ il démontre, d'abord que $F(x, n) = \frac{x}{n} F'_x(x, n) + nF(x-1, n-1)$; ensuite il montre que $F'_x(x, n) = 0$, de sorte que $F(x, n)$ est indépendant de x, et par conséquent on peut écrire $F(n, n) = nF(n-1, n-1)$ et en remarquant que $F(1, 1) = 1$, on en conclut, comme dans la théorie des permutations : $F(n, n) = n!$

10. — *Résoudre l'équation*

$$x^4 - 2ax^3 - (m^2 - 2a^2)x^2 + 2am^2x - a^2m^2 = 0.$$

Soit $f(x)$ le premier membre de cette équation. Ordonnons $-f(x)$ suivant les puissances croissantes et extrayons la racine carrée. Nous aurons

$$-f(x) = \left(am - mx - \frac{a}{m}x^2\right)^2 - \left[\frac{a^2}{m^2} + 1\right]x^4 = 0.$$

L'équation proposée peut donc s'écrire

$$(a^2 + m^2)x^4 - [am^2 - m^2x - ax^2]^2 = 0$$

ou encore $\left(\sqrt{a^2 + m^2} - a\right)x^2 - m^2x + am^2\left(\sqrt{a^2 + m^2} + a\right)x^2 + m^2x - am^2] = 0.$

Les racines de l'équation proposée sont donc les racines des deux équations

(1) $$\left(\sqrt{a^2 + m^2} - a\right)x^2 - m^2x + am^2 = 0,$$

(2) $$\left(\sqrt{a^2 + m^2} + a\right)x^2 + m^2x - am^2 = 0.$$

Si l'on suppose a positif, l'équation (2) a ses racines réelles et de signes contraires; pour que l'équation (1) ait ses racines réelles, il faut supposer $m \geqslant 2a\sqrt{2}$. Ces conclusions sont renversées si l'on suppose a négatif.

J.-G. Darboux, élève du lycée Louis-le-Grand.

(Autres bonnes solutions : MM. Baudran (lycée de Rouen), Randon (Louis-le-Grand), Teilhet (à Saint-Étienne).)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École polytechnique (1890).

I. — Algèbre.

1. — Étudier les séries dont les termes généraux sont :

$$\frac{1}{n} e^{\frac{an+b}{a'n+b'}}, \qquad n^a e^{b\sqrt{n}}, \qquad \left(\frac{1}{n^p} + x^n\right) \sin \frac{\alpha}{n^p}, \qquad \sin na, \qquad \sin \frac{a}{n}.$$

2. — Sommer la série $\sum \frac{4n-3}{n^2 - 4n}$.

3. — Calculer à $\frac{1}{10000}$ près $\sin 11°$ et $\sin 11''$. Comparer les deux développements.

4. — Calculer à $\frac{1}{1000}$ près les séries $\sum \frac{1}{1.\,2.\,\ldots\,(n-1)\,n^2}$, $\sum \frac{1}{1.\,3.\,5.\,\ldots\,(2n+1)}$.

5. — Étudier la série $u_n = x^n y^{\frac{p(p+1)}{2}}$, $x = 1 - y$, p étant le nombre des chiffres de n.

6. — Dérivée de la fonction y définie par l'équation $e^{\sqrt{x^2+y^2}} = m \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

7. — Dérivée n^e de chacune des fonctions $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sqrt{1+x^2}$, $e^{\frac{1}{x}}$, e^{-x^2}, $e^{ax}x^m$. Pour chacune de ces deux dernières fonctions on voit apparaître un polynome entier $P(x)$; prouver que $P(x) = 0$ a toutes ses racines réelles.

8. — Limite de $e^{\frac{x}{y}}$, x étant le nombre de chiffres de y supposé entier, quand y augmente indéfiniment.

9. — $\varphi(x)$ étant une fonction qui croît indéfiniment avec x, démontrer que si $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ a une limite, $\frac{\varphi(x)}{x}$ a la même limite.

10. — Résoudre les équations : $x^9 - 1 = 0$, $x^{12} - 2x^{10} - 2x^2 + 1 = 0$, $2x^4 - x^2 - x + 1 = 0$, $12x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$, $x^3 - 5x^2 + 8x - 11 = 0$.

11. — Discuter les racines de l'équation $x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta^2 x + 8 = 0$, quand le point (α, β) se déplace dans le plan.

12. — Résoudre $18x^3 - 45x^2 - 98x + 245 = 0$, sachant que x_1, x_2, x_3 sont liées par la relation $\frac{x_1 x_2}{x_3} = \frac{98}{45}$.

13. — Nombre des racines réelles de l'équation $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 2\lambda \\ 4 & 2\lambda & S+4\lambda \end{vmatrix} = 0$.

14. — Démontrer que les fonctions $\Delta = \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A-S & B'' \\ B'' & A'-S \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = A - S$, $\Delta_1 = 1$ jouissent des propriétés des fonctions de Sturm.

15. — Nombre maximum des racines réelles de l'équation

$$x^6 + bx^3 + cx + d = 0.$$

(A suivre.)

QUESTIONS PROPOSÉES

35. — Le déterminant principal déduit du tableau des éléments d'un déterminant symétrique gauche est de degré pair.

(Émile Borel.)

36. — Étant donnée une série positive convergente

$$u_1, u_2, \ldots u_n,$$

on peut toujours trouver des entiers croissant indéfiniment

$$p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$$

tels qu'en posant

$$v_1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_{p_1}, \quad v_2 = u_{p_1+1} + u_{p_1+2} + \ldots + u_{p_2}, \quad \ldots \quad v_n = u_{p_{n-1}+1} + \ldots u_{p_n},$$

$$v_{n+1} = u_{p_n+1} + u_{p_n+2} + \ldots + u_{p_{n+1}}, \ldots$$

on ait, du moins à partir d'une valeur convenable de n,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < k < 1,$$

k étant un nombre positif arbitraire, mais moindre que 1.

(E. Weyr.)

37. — On sait que si, quand n croît indéfiniment, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite, $\sqrt[n]{u_n}$ a la même limite (u_n étant supposé positif quel que soit l'entier n). Démontrer que si $\sqrt[n]{u_n}$ a une limite λ, et si, en outre, en posant $\sqrt[n]{u_n} = \lambda + \alpha_n$, le rapport $n\alpha_n$ a une limite finie et déterminée quand n croît indéfiniment, dans ce cas, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a aussi pour limite λ quand n croît indéfiniment.

Appliquer la règle précédente à la série $1, a, ab, a^2b, a^2b^2, \ldots a^n b^n, a^{n+1}b^n, \ldots$

(Bourlet.)

38. — En désignant par λ_n la partie entière de $\log_{10} n$, étudier la série dont le terme général est $u_n = a^{n-\sqrt{n}} b^{\frac{1}{2\sqrt{n}}\,1+\lambda_n}$, en supposant $0 < a < 1 < b$.

Montrer que la série est convergente et qu'il y a une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\frac{u_n - 1}{u_n}$ peut dépasser un nombre donné d'avance, quelque grand qu'il soit.

(Lerch, *Journal de Teixeira.*)

Appliquer à l'exemple précédent la règle de M. Bourlet.

39. — Étudier la série dont le terme général $u_n = a^{n-p} b^{p^2}$, $(0 < a < 1 < b)$, p étant le nombre des chiffres de n.

(*Nouvelles Annales de Mathématiques.*)

40. — On donne n points dans un plan; par cinq de ces points on fait passer des coniques de toutes les façons possibles; trouver le nombre des points de rencontre de ces coniques, autres que les n points donnés.

***41.** — Soit ABCD un quadrilatère inscriptible; soit E le point de concours des côtés opposés AB, DC et soit F le point de concours des côtés AD, BC; on prend sur EA, EG = AB et sur ED, EH = CD.

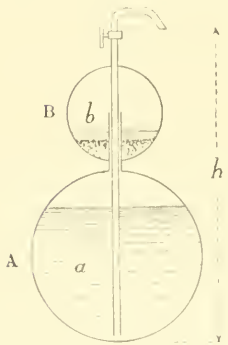
Démontrer que GH est le double de la droite qui joint les milieux des diagonales AC, BD et 2° que EF est tangente au cercle circonscrit au triangle EGH.

(R. W. Genese.)

***42.** — Trois sommets d'un quadrilatère sont fixes, le quatrième décrit une droite. Trouver le lieu du centre de gravité du quadrilatère.

(Dr Guntsche, à Breslau.)

43. — Lieu du centre de gravité d'un triangle équilatéral inscrit ou circonscrit à une conique donnée.



44. — L'aire latérale d'un cône de révolution limité par une section elliptique a pour mesure $\frac{S \sin\varphi}{\sin\alpha}$, S désignant l'aire de la base, φ l'angle que fait son plan avec l'axe du cône et α le demi-angle d'ouverture du cône.

(V. Jamet, professeur au lycée de Marseille.)

45. — Un appareil à eau de Seltz (système D. Fèvre) est formé de deux vases A et B. Soit a le volume du récipient A, et b celui du récipient B. On demande quel poids minimum de bicarbonate de soude il faudra employer pour que le liquide s'écoule de l'appareil très lentement et complètement.

On donne le coefficient de solubilité c de l'acide carbonique à la température de l'appareil. Cas particulier : $c = 1$ (coefficient à 15°).

Examiner ce qui se produit quand le rapport $\frac{b}{a}$ est négligeable. On prendra particulièrement $a = 5$ litres, $b = 1/2$ litre, $h = 54^{cm}$, la pression étant de 76^{cm} et la température de 15°.

(A. Leduc, professeur au lycée Louis-le-Grand.)

ERRATA du n° 2. — Page 27, avant-dernière ligne : au lieu de $g^2 + q^2 = 1$, lire $p^2 + q^2 = 1$. — Page 28, ligne 10 en remontant : au lieu de $a^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, lire $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$. — Page 29, 6e ligne : le coefficient de $Y - \beta$ est $-\beta a^4 b^2$ et le terme constant $-a^2b^4(a^2 + b^2)$; — 10e ligne : l'équation du cercle est $(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + \frac{b^2\alpha}{a^2}(X - \alpha) + \beta(Y - \beta) = 0$; — 4e ligne en remontant, lire : $a^2(a^2 - p^2)^2 + q(4p^3 + 27q) = 0$.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 26496-11-90.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

11. — *Séparer les racines de l'équation*

$$2x(x+4) - e^{a+\frac{x^2}{6}} = 0$$

suivant les différentes valeurs du paramètre a.

Après avoir exclu l'intervalle $(-4, 0)$ auquel n'appartient évidemment aucune racine réelle, prenons les logarithmes népériens des deux membres de l'équation

$$e^{a+\frac{x^2}{6}} = 2x(x+4),$$

ce qui donne

$$a + \frac{x^2}{6} = \mathrm{L}.2x(x+4),$$

équation équivalente à l'équation donnée; et soit

$$f(x) = a + \frac{x^2}{6} - \mathrm{L}.x(x+4) - \mathrm{L}.2 = 0.$$

d'où

$$f'(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{(x-2)(x^2+6x+6)}{3x(x+4)}.$$

$f(x)$ et $f'(x)$ sont discontinues pour $x = -4$ et $x = 0$; mais nous pouvons appliquer le théorème de Rolle dans les intervalles $(-\infty, -4-\varepsilon)$ et $(+\varepsilon, +\infty)$, ε étant un nombre positif, aussi petit que l'on veut.

$f'(x)$ ne s'annule, en dehors de l'intervalle $(-4, 0)$, que pour $x = -\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ et pour $x = 2$.

Substituons donc à x, dans $f(x)$, la suite

$$-\infty, \quad -\sqrt{3}(1+\sqrt{3}), \quad -4-\varepsilon \;\Big|\; +\varepsilon, \quad +2, \quad +\infty.$$

Ecrivons :

$$f(x) = a - \mathrm{L}\,2 + x^2\left[\frac{1}{6} - \frac{\mathrm{L}.x(x+4)}{x(x+4)}\cdot\frac{x+4}{x}\right].$$

$\dfrac{\mathrm{L}.x(x+4)}{x(x+4)}$ a pour limite 0, quand x grandit indéfiniment; donc $f(\pm\infty) = +\infty$.

$f(-4-\varepsilon)$ et $f(+\varepsilon)$ sont positifs;

enfin $f[-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})] = a - (\mathrm{L}4\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}) = a - \mathrm{A}$, en posant $\mathrm{A} = \mathrm{L}4\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}$.

$f(2) = a - \left(\mathrm{L}24 - \dfrac{2}{3}\right) = a - \mathrm{B}$, — $\mathrm{B} = \mathrm{L}24 - \dfrac{2}{3}$.

On aura donc le tableau suivant des signes de substitution :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$	$-4-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$+2$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$a-\mathrm{A}$	$+$	$+$	$a-\mathrm{B}$	$+$

On voit aisément que $\mathrm{A} < 0 < \mathrm{B}$. Nous distinguerons donc les cas suivants :

1° $a < \mathrm{A}$. $a - \mathrm{A}$ et $a - \mathrm{B}$ sont négatifs; on a *quatre* racines réelles, une dans chaque intervalle.

2° $a = \mathrm{A}$. *Trois* racines réelles, dont une est égale à $-\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ et une dans chacun des intervalles $(+\varepsilon, 2)$, $(2, +\infty)$.

3° $A < a < B$. *Deux* racines réelles et positives, l'une plus petite que 2, l'autre plus grande que 2.
4° $a = B$. *Une seule* racine réelle, égale à 2.
5° $a > B$. Pas de racine réelle.

(H. de Montille, lycée Louis-le-Grand.)

26. — *Trouver la somme des produits* p *à* p *de* m *termes consécutifs d'une progression géométrique.*

Soit a le premier terme, q la raison de la progression, S_p la somme des produits p à p. Considérons le produit

$$(1)\qquad f(x) = (x+a)(x+aq)\ldots(x+aq^{m-1}) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} + \ldots + A_m.$$

Nous aurons $$S_p = A_p.$$

Mais on a

$$(2)\qquad q^m f\left(\frac{x}{q}\right) = (x+aq)(x+aq^2)\ldots(x+aq^m) = x^m + A_1 q x^{m-1} + A_2 q^2 x^{m-2} + \ldots + A_p q^p x^{m-p} + \ldots + A_m q^m.$$

Mais, d'après les égalités (1) et (2),

$$q^m f\left(\frac{x}{q}\right) = f(x)\,\frac{x+aq^m}{x+a}.$$

On aura donc

$$(x+a)[x^m + A_1 q x^{m-1} + \ldots + A_{p-1} q^{p-1} x^{m-p+1} + A_p q^p x^{m-p} + \ldots + A_m q^m] = (x+aq^m)(x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{p-1} x^{m-p+1} + A_p x^{m-p} + \ldots + A_m].$$

Égalons les coefficients de x^{m-p+1}; nous aurons

$$A_p q^p + A_{p-1} a q^{p-1} = A_p + A_{p-1} a q^m,$$

d'où $$A_p = a q^{p-1}\,\frac{1-q^{m-p+1}}{1-q^p}\,A_{p-1};$$

de même $$A_{p-1} = a q^{p-2}\,\frac{1-q^{m-p+2}}{1-q^{p-1}}\,A_{p-2},$$

. . . . . .

$$A_1 = a\,\frac{1-q^m}{1-q},$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$A_p = a^p q^{\frac{p(p-1)}{2}}\,\frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\ldots(1-q^{m-p+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^p)};$$

par suite, $$S_p = \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\ldots(1-q^{m-p+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^p)}\,a^p q^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

(E. Baudran, lycée de Rouen.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

14. — a *et* b *désignant les coordonnées rectangulaires d'un point, quelle est, pour chaque position du point, la nature des racines de l'équation*

$$f(t) = 3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0?$$

On construira en particulier le lieu des positions du point M *pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.*

(École Normale, 1884.)

Remarquons que si l'on y considère a et b comme des coordonnées courantes, l'équation proposée représente une droite. Cette droite enveloppe une certaine courbe de quatrième classe que nous désignerons par C. Le problème proposé se ramène à celui-ci :

Étant donnée la courbe C, *étudier quelle est, pour chaque point du plan, la nature des tangentes à la courbe* C *issues de ce point.*

Pour résoudre la question, nous allons d'abord construire la courbe C. On obtiendrait son équation en éliminant t entre les équations

$$f(t) = 3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0,$$
$$\frac{1}{12}f'(t) = t^3 + 2at^2 - 2bt = 0.$$

Mais au lieu de faire cette élimination, il est préférable de résoudre les équations qui précèdent par rapport à a et b. On trouve ainsi

$$a = \frac{t(3t^2 - 2)}{4(1 - t^2)}, \qquad b = \frac{t^4}{4(1 - t^2)}.$$

Ces équations expriment les coordonnées d'un point de la courbe C en fonction rationnelle d'un paramètre. Cette courbe est donc unicursale et du quatrième degré.

Elle est symétrique par rapport à Oy, car, si l'on change t en $-t$, b ne change pas et a change de signe.

Il nous suffira donc de faire varier t par valeurs positives; nous obtiendrons une moitié de la courbe, et nous en déduirons le reste par symétrie.

Pour étudier les variations de a et b, prenons leurs dérivées par rapport à t :

$$\frac{da}{dt} = \frac{(2 - t^2)(3t^2 - 1)}{4(1 - t^2)^2}, \qquad \frac{db}{dt} = \frac{t^3(2 - t^2)}{2(1 - t^2)^2};$$

d'où

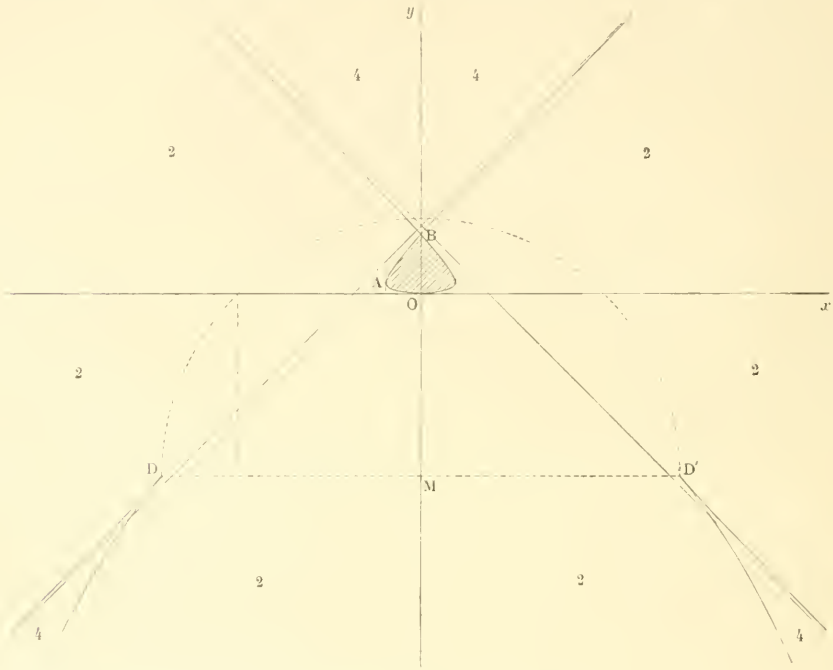
$$\frac{db}{da} = \frac{2t^3}{3t^2 - 1}.$$

On aura donc le tableau de variation suivant.

t	0	croît	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	croît	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	croît	$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$	croît	$\sqrt{2}$	croît	$+\infty$
$\frac{da}{dt}$		$-$	0		$+$				$+$	0	$-$	
$\frac{db}{dt}$					$+$				$+$	0	$-$	
a	0	décroît	$-\frac{\sqrt{3}}{8}$ (min.)	croît	0	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	$-\sqrt{2}$ (max.)	décroît	$-\infty$
b	0	croît	$\frac{1}{24}$	croît	$\frac{1}{3}$	croît	$+\infty$	$-\infty$	croît	-1 (max.)	décroît	$-\infty$
$\frac{db}{da}$		$-$	$-\infty$ | $+\infty$	$+$	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+$	1	1	$+$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	$+$	

De la variation de a et de b, on déduit la forme de la courbe; la tangente en chaque point est donnée par la valeur de $\frac{db}{da}$. La courbe est tangente à l'origine à l'axe des x; au point $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{1}{24}\right)$ la tangente est parallèle à Oy; la courbe rencontre Oy au point $B\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Le point $D(-\sqrt{2}, -1)$ est

un point de rebroussement ; on reconnaît que c'est un rebroussement de première espèce, en calculant en fonction de t le coefficient angulaire de la droite qui joint le point D à un point voisin de la courbe. On constate que ce coefficient angulaire varie dans le même sens quand t varie de $\sqrt{2}-\varepsilon$ à $\sqrt{2}+\varepsilon$.



Cherchons maintenant si les branches infinies ont des asymptotes.

Pour $t = 1$, a et b sont infinis.

Or $$\frac{b}{a} = \frac{t^3}{3t^2 - 2}; \qquad \text{pour } t = 1, \qquad \frac{b}{a} = 1.$$

De plus, $$b - a = \frac{t^4 - t(3t^2 - 2)}{4(1 - t^2)} = \frac{t(t^2 - 2t - 2)}{-4(t + 1)};$$

pour $t = 1$, $$b - a = \frac{3}{8}.$$

Cette branche de courbe a donc pour asymptote $y = x + \frac{3}{8}$.

Pour avoir la position de la courbe, je calcule

$$b - a - \frac{3}{8} = \frac{t(t^2 - 2t - 2)}{-4(t + 1)} - \frac{3}{8} = \frac{-(t - 1)(2t^2 - 2t - 3)}{8(t + 1)}.$$

Le second membre est négatif pour $t = 1 - \varepsilon$, positif pour $t = 1 + \varepsilon$, d'où la position de la courbe.

En outre cette asymptote rencontre la courbe en deux points correspondant aux valeurs de t, racines de l'équation

$$2t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Quant t est infini, a et b sont infinis, et comme le rapport $\frac{b}{a}$ est également infini, la branche de courbe est parabolique dans la direction Oy.

On reconnaît en outre que la courbe n'a pas de points d'inflexion proprement dits en résolvant l'équation

$$\frac{da}{dt}\cdot\frac{d^2b}{dt^2} - \frac{db}{dt}\cdot\frac{d^2a}{dt^2} = 0,$$

qui se réduit à

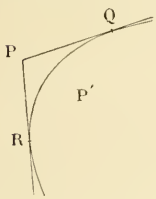
$$t^2(t^2 - 2)^2 = 0.$$

Achevant la courbe par symétrie, on voit que le point B est un point double; on a deux points de rebroussement D et D′, et deux asymptotes.

En appliquant la formule de Plücker, on reconnaît que cette courbe du quatrième degré est de quatrième classe.

La courbe C étant ainsi construite, il reste à distinguer la nature des tangentes à cette courbe issues d'un point M, suivant la région dans laquelle se trouve le point M. Le nombre des tangentes réelles sera celui des racines réelles de l'équation $f(t) = 0$.

Le problème étant posé de cette manière, il est évident que la courbe C séparera les régions à distinguer dans le plan. Prenons en effet un point P voisin de la courbe; menons les tangentes PQ et PR. Lorsque P se rapproche de la courbe, ces tangentes tendent à se confondre, et se confondent au moment où P vient sur la courbe. Si le point P vient ensuite en P′, les deux tangentes deviennent imaginaires. Deux des racines de l'équation qui étaient d'abord réelles se sont confondues, puis sont devenues imaginaires.



Ce raisonnement ne serait en défaut que si la courbe avait des points d'inflexion, et nous avons montré qu'elle n'en avait pas.

Plaçons le point M (a, b) sur l'axe Oy et soient $0, -1$ ses coordonnées. L'équation $f(t) = 0$ devient

$$3t^4 + 12t^2 - 4 = 0.$$

Elle a deux racines réelles et deux racines imaginaires. Donc du point M, ou de tout point de la région numérotée 2 sur la figure, on ne peut mener que deux tangentes réelles à la courbe. Alors de tout point de la région numérotée 4, partiront quatre tangentes à la courbe, réelles toutes les quatre. Au contraire de tout point de la région couverte de hachures, on ne pourra mener aucune tangente réelle à la courbe.

Il y a plusieurs cas particuliers à examiner. Si le point est sur la courbe C, deux tangentes sont confondues; en D et en D′, trois tangentes sont confondues avec la tangente de rebroussement. Au point B, on a deux tangentes comptant chacune pour deux.

Enfin, si le point est sur l'axe des x, il ne part de ce point que deux tangentes, l'axe lui-même qui compte pour trois, et une deuxième tangente variable; comme cas plus particulier encore, si le point (a, b) est à l'origine, les quatre tangentes sont confondues avec Ox.

En résumé :

Quand le point se trouve :	L'équation a :
dans les régions 4,	quatre racines réelles;
dans les régions 2,	deux racines réelles et deux imaginaires;
sur la courbe C { portion entourant la boucle,	une racine double réelle et deux imaginaires;
sur la courbe C { autres portions,	une racine double réelle et deux racines simples réelles;
en D, D′ ou sur Ox,	une racine triple et une racine simple réelles;
au point B,	deux racines doubles réelles;
à l'origine,	une racine quadruple.

J.-G. Darboux, élève du lycée Louis-le-Grand.

Remarque. — Prenons la polaire réciproque de la courbe C par rapport à l'ellipse

$$8a^2 + 4b^2 = 3.$$

En identifiant l'équation $f(t) = 0$ avec l'équation

$$8ax + 4by = 3$$

de la polaire d'un point (x, y) par rapport à l'ellipse, on obtient

$$\frac{x}{t^3} = \frac{y}{1 - 3t^2} = \frac{-1}{t^4},$$

ce qui donne $y = 3x^2 - x^4$,

courbe facile à construire.

Il y a deux points d'inflexion donnés par l'équation

$$y'' = 6(1 - 2x^2) = 0,$$

une tangente double parallèle à Ox

$$y = \frac{9}{4}.$$

Le point à l'infini sur Oy est un point triple et la droite de l'infini est tangente triple.

Ce sont d'ailleurs les seules singularités. On peut déduire de là la forme et les singularités de la courbe transformée, c'est-à-dire de la courbe C.

Émile Borel.

17. — *Lieu du centre d'une hyperbole équilatère de grandeur donnée qui passe par deux points fixes.*

Soit $2d$ la distance des deux points; prenons pour axe des x la droite qui joint ces points, et pour axe des y une perpendiculaire au milieu.

L'équation générale des hyperboles équilatères passant par les deux points est

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 2\mu y - d^2 = 0.$$

Écrivons qu'elle est de grandeur donnée, c'est-à-dire que son demi-axe transverse est égal à a.

On aura

$$-\frac{\Delta}{\delta S} = a^2,$$

$$S = \sqrt{1 + \lambda^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\Delta}{\delta} = \mu y - d^2,$$

y étant l'ordonnée du centre; donc

$$(1) \qquad \frac{(\mu y - d^2)^2}{1 + \lambda^2} = a^4.$$

Prenons maintenant les équations du centre :

$$(2) \qquad x + \lambda y = 0,$$

$$(3) \qquad \lambda x - y + \mu = 0.$$

Éliminant λ et μ entre (1), (2), (3), on aura l'équation du lieu.

On tire aisément λ et μ de (2) et (3); en transportant dans (1), on a l'équation du sixième degré

$$y^2[d^2 - (x^2 + y^2)]^2 = a^4(x^2 + y^2).$$

Nous la construirons en coordonnées polaires. L'équation peut s'écrire

$$\sin^2 \omega(d^2 - \rho^2)^2 = a^4 \qquad \text{ou} \qquad \pm \sin \omega(d^2 - \rho^2) = a^2$$

ou

$$\rho^2 = d^2 \pm \frac{a^2}{\sin \omega}.$$

On a donc les deux équations

$$\rho^2 = d^2 + \frac{a^2}{\sin\omega}, \qquad \rho^2 = d^2 - \frac{a^2}{\sin\omega}.$$

Or l'une d'elles se déduit de l'autre en changeant ρ en $-\rho$ et ω en $\pi + \omega$; par conséquent, ces deux équations représentent la même courbe. Il nous suffira de considérer une seule de ces équations.

Nous prendrons $$\rho^2 = d^2 + \frac{a^2}{\sin\omega}.$$

Comme à une valeur de ω, correspondent deux valeurs de ρ égales et de signe contraire, la courbe est symétrique par rapport au centre. De plus, en changeant ω en $\pi - \omega$, ρ^2 ne change pas, la courbe est symétrique par rapport à Oy. Elle sera alors symétrique par rapport aux deux axes.

Nous ferons varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, ne prenant que les valeurs positives de ρ, et nous achèverons par symétrie.

Pour que ρ soit réel, il faut que

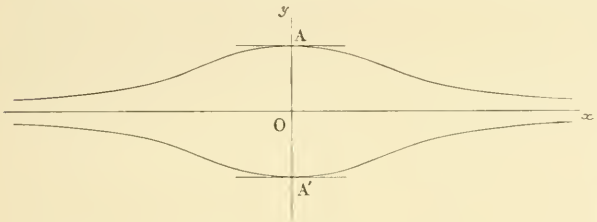
$$(d^2 \sin\omega + a^2)\sin\omega > 0,$$

c'est-à-dire que $\sin\omega$ soit extérieur à l'intervalle $\left(-\frac{a^2}{d^2}, 0\right)$.

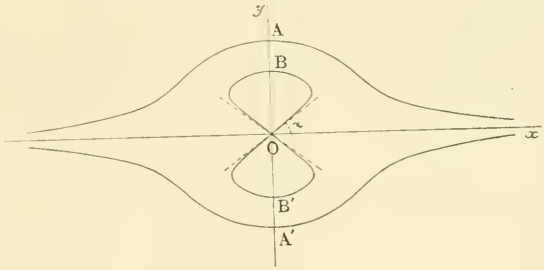
1er Cas. $a > d$. $d^2 \sin\omega + a^2$ est toujours positif; ω ne peut varier que de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On a le tableau de variation suivant

ω	0	croît	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$+\infty$	décroît	$\sqrt{a^2 + d^2}$

L'asymptote est l'axe Ox, les tangentes en A et A′ sont parallèles à Ox.



2me Cas. — $a < d$. Soit $-\alpha$ l'arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et 0 qui a pour sinus $-\frac{a^2}{d^2}$; ω ne pourra varier qu'entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\alpha$, et entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.



ω	$-\frac{\pi}{2}$	croît	$-\alpha$	0	croît	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$\sqrt{d^2 - a^2}$	décroît	0	$+\infty$	décroît	$\sqrt{d^2 + a^2}$

Les tangentes en A, A′, B, B′ sont parallèles à Ox. Ox est asymptote.

Le cas de $a = d$ ne présente pas d'intérêt; on a la même forme de courbe que dans le premier cas.

(R. Laforgue, à Montauban.)

Solutions analogues par MM. Perrée, lycée Condorcet; Randon, lycée Louis-le-Grand.

Autre solution. — M. Goulard, professeur au lycée de Marseille, obtient d'une façon très élégante l'équation du lieu en coordonnées polaires.

Soient M et N les deux points, et C (ρ, ω) le centre de l'une quelconque des hyperboles. Menons par le point C une parallèle Cx à OM, et soit Cy le diamètre conjugué de Cx, lequel passe par le point O. En désignant par a' le demi-diamètre, réel ou imaginaire, dirigé suivant Cx, l'équation de l'hyperbole dans le système d'axes Cx, Cy, est

$$x^2 - y^2 = a'^2.$$

Or les coordonnées des points M et N dans ce système d'axes sont $\pm d, \rho$. La condition pour que l'hyperbole passe par M et N est donc

$$(1) \qquad d^2 - \rho^2 = a'^2.$$

D'autre part, le second théorème d'Apollonius donne

$$(2) \qquad \pm a'^2 \sin\omega = a^2.$$

Éliminant a' entre (1) et (2), on a l'équation du lieu cherché

$$d^2 - \rho^2 = \pm \frac{a^2}{\sin\omega}.$$

19. — (Voir l'énoncé de cette question n° 2, p. 28.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soit MG la normale en M, G étant le point de rencontre avec le grand axe de l'ellipse, et soit MN l'une des autres normales menées de M à l'ellipse, N étant le pied de cette normale et Q étant le point où elle rencontre le grand axe. On sait que les longueurs NQ et MG sont proportionnelles aux longueurs des diamètres respectivement perpendiculaires à ces normales. Soit T le pôle de MN; en appliquant le théorème de Newton et remarquant que si l'on abaisse de G une perpendiculaire GP à la droite MN, les triangles rectangles TMN, MGP sont semblables; on a

$$\frac{NQ}{MG} = \frac{NT}{MT} = \frac{MP}{MG},$$

d'où l'on tire NQ = MP. Le point P est un point du cercle décrit sur MG comme diamètre et ce cercle est tangent à l'ellipse en M.

Remarque. — L'équation de ce cercle peut être mise sous la forme

$$(X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + b^2\left(\frac{\alpha X}{a^2} + \frac{\beta Y}{b^2} - 1\right) = 0.$$

R. W. Genese, University College, Aberystwyth (Wales).

Note. — Soient x, y et x', y' les coordonnées des extrémités M, M' de deux demi-diamètres conjugués OM, OM' d'une ellipse dont l'équation rapportée à ses axes de symétrie est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Si l'on pose $b' = OM'$, les formules de Chasles, savoir :

$$\frac{x'}{a} = \varepsilon\frac{y}{b}, \qquad \frac{y'}{b} = -\varepsilon\frac{x}{a} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

donnent

$$b'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2, \qquad \text{d'où} \qquad b^4x^2 + a^4y^2 = a^2b^2b'^2.$$

Cela posé, si l'on mène la normale en M à l'ellipse et si l'on désigne par N et N' les points où cette normale rencontre le grand axe et le petit axe respectivement, on a

$$\overline{MN}^2 = y^2 + (X - x)^2,$$

X désignant l'abscisse de N. Or l'équation de la normale étant

$$\frac{a^2(X-x)}{x} = \frac{b^2(Y-y)}{y},$$

si l'on fait $Y = 0$, on obtient
$$X - x = -\frac{b^2}{a^2}x$$

et par suite
$$\overline{MN}^2 = y^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4} = \frac{b^2b'^2}{a^2}.$$

Donc
$$MN = \frac{b}{a}b'.$$

On trouve de même
$$MN' = \frac{a}{b}b'.$$

La première de ces formules montre que la *longueur d'une normale comprise entre son pied et son point de rencontre avec le grand axe* est proportionnelle à la longueur du demi-diamètre conjugué au diamètre passant par le pied de la normale, c'est-à-dire *est proportionnelle à la longueur du demi-diamètre perpendiculaire à la normale.* C'est la proposition sur laquelle s'est appuyée M. R. Genese dans l'élégante démonstration géométrique qu'on vient de lire.

Remarquons encore les relations $MN.MN' = b'^2$ et $\frac{MN}{MN'} = \frac{b^2}{a^2}$. B. N.

46. — *Les quatre cercles qui passent chacun par trois des pieds des normales issues d'un point* P *à une ellipse* E, *rencontrent l'hyperbole aux pieds des normales* H, *en quatre points distincts de ces pieds. Démontrer que ces quatre points sont situés sur une ellipse de grandeur constante ayant le point* P *pour centre et ses axes parallèles à ceux de l'ellipse* E.

Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de E.

Les coordonnées d'un point quelconque de H peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t:

(1) $$x = \frac{a^2\alpha}{t + a^2}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{t + b^2}.$$

α, β sont les coordonnées de P.

Pour simplifier le langage, nous appellerons point t_0, le point de H qui correspond à la valeur t_0 du paramètre t.

Les pieds des normales sont déterminés par l'équation

(2) $$\frac{a^2\alpha^2}{(t + a^2)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(t + b^2)^2} - 1 = 0.$$

Soit t_1 une racine. Le point t_1 est un pied de normale. Je vais considérer le cercle passant par les trois autres pieds; il rencontrera H en ces trois pieds et en un quatrième point t'. Je vais chercher la relation qui existe entre t_1 et t'.

On a
$$\frac{a^2\alpha^2}{(t_1 + a^2)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(t_1 + b^2)^2} - 1 = 0.$$

Retranchant de (2):
$$a^2\alpha^2\left[\frac{1}{(t + a^2)^2} - \frac{1}{(t_1 + a^2)^2}\right] + b^2\beta^2\left[\frac{1}{(t + b^2)^2} - \frac{1}{(t_1 + b^2)^2}\right] = 0;$$

divisant par $t - t_1$:

(3) $$a^2\alpha^2\frac{t + t_1 + 2a^2}{(t_1 + a^2)^2(t + a^2)^2} + b^2\beta^2\frac{t + t_1 + 2b^2}{(t_1 + b^2)^2(t + b^2)^2} = 0,$$

équation du troisième degré qui admet pour racines les valeurs de t correspondantes aux trois pieds de normales en question.

Soit maintenant un cercle
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Les points où il coupe H sont déterminés par

(4) $$\frac{a^4\alpha^2}{(t + a^2)^2} + \frac{b^4\beta^2}{(t + b^2)^2} + A\frac{a^2\alpha}{t + a^2} + B\frac{b^2\beta}{t + b^2} + C = 0.$$

Débarrassons l'équation (4) de la racine t', en retranchant membre à membre cette équation et la suivante :

$$\frac{a^4\alpha^2}{(t'+a^2)^2} + \frac{b^4\beta^2}{(t'+b^2)^2} + A\frac{a^2\alpha}{t'+a^2} + B\frac{b^2\beta}{t'+b^2} + C = 0;$$

il vient

$$a^4\alpha^2\left(\frac{1}{(t+a^2)^2} - \frac{1}{(t'+a^2)^2}\right) + b^4\beta^2\left(\frac{1}{(t+b^2)^2} - \frac{1}{(t'+b^2)^2}\right) + Aa^2\alpha\left(\frac{1}{t+a^2} - \frac{1}{t'+a^2}\right) + Bb^2\beta\left(\frac{1}{t+b^2} - \frac{1}{t'+b^2}\right) = 0;$$

divisant par $t - t'$:

$$(5) \qquad a^4\alpha^2\frac{t+t'+2a^2}{(t'+a^2)^2(t+a^2)^2} + b^4\beta^2\frac{t+t'+2b^2}{(t'+b^2)^2(t+b^2)^2} + \frac{Aa^2\alpha}{(t+a^2)(t'+a^2)} + \frac{Bb^2\beta}{(t+b^2)(t'+b^2)} = 0.$$

On aura la relation qui lie t' et t_1, en écrivant que (3) et (5) ont mêmes racines, et éliminant A, B, C.

Pour faire aisément ce calcul, nous nous appuierons sur ce fait qu'une fraction rationnelle n'est décomposable que d'une seule manière en fractions simples. Pour que (3) et (5) aient mêmes racines, il faut que les premiers membres, qui sont des fractions rationnelles, soient identiques, à un facteur constant près. En effet, les dénominateurs sont identiques, à un facteur constant près, et il doit en être de même des numérateurs pour que les deux équations aient mêmes racines.

Alors, en décomposant les deux premiers membres en fractions simples, les coefficients devront être proportionnels. N'écrivons cette proportionnalité que pour les fractions $\frac{1}{(t+a^2)^2}$ et $\frac{1}{(t+b^2)^2}$, dont les coefficients s'aperçoivent aisément; il vient

$$\frac{\dfrac{a^2\alpha^2}{t_1+a^2}}{\dfrac{a^4\alpha^2}{t'+a^2}} = \frac{\dfrac{b^2\beta^2}{t_1+b^2}}{\dfrac{b^4\beta^2}{t'+b^2}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{t'+a^2}{(t_1+a^2)a^2} = \frac{t'+b^2}{(t_1+b^2)b^2}.$$

Divisant par $a^2 - b^2$, il vient

$$(6) \qquad t't_1 + t'(a^2+b^2) + a^2b^2 = 0:$$

c'est la relation cherchée entre t' et t_1.

Or, les quatre valeurs de t_1 sont données par

$$(7) \qquad \frac{a^2\alpha^2}{(t_1+a^2)^2} + \frac{b^2\beta^2}{(t_1+b^2)^2} - 1 = 0;$$

éliminant t_1 entre (6) et (7), j'aurai l'équation du quatrième degré donnant les quatre valeurs de t'.

De (6) on tire

$$t_1 + a^2 = -\frac{b^2(t'+a^2)}{t'}, \qquad t_1 + b^2 = -\frac{a^2(t'+b^2)}{t'},$$

d'où

$$\frac{a^2\alpha^2t'^2}{b^4(t'+a^2)^2} + \frac{b^2\beta^2t'^2}{a^4(t'+b^2)^2} - 1 = 0$$

ou

$$\frac{a^2\alpha^2}{b^4}\left(1 - \frac{a^2}{t'+a^2}\right)^2 + \frac{b^2\beta^2}{a^4}\left(1 - \frac{b^2}{t'+b^2}\right)^2 - 1 = 0.$$

x', y' désignant les coordonnées du point t', on a

$$x' = \frac{a^2\alpha}{t'+a^2}, \qquad y' = \frac{b^2\beta}{t'+b^2}.$$

On aura donc

$$\frac{a^2\alpha^2}{b^4}\left(1 - \frac{x'}{\alpha}\right)^2 + \frac{b^2\beta^2}{a^4}\left(1 - \frac{y'}{\beta}\right)^2 - 1 = 0$$

ou
$$\frac{a^2}{b^4}(x' - \alpha)^2 + \frac{b^2}{a^4}(y' - \beta)^2 - 1 = 0,$$

ce qui démontre le théorème, attendu que les quatre points x', y' sont situés sur l'ellipse

$$\frac{(x - \alpha)^2}{\left(\frac{b^2}{a}\right)^2} + \frac{(y - \beta)^2}{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2} - 1 = 0,$$

de demi-axes $\frac{b^2}{a}$, $\frac{a^2}{b}$, de centre P, et ayant des axes parallèles aux axes de l'ellipse donnée.

G. Papelier.

CHIMIE

Concours général de mathématique spéciales (1890).

I. — *Acide sulfureux. Propriétés. — Décrire les réactions où cet acide intervient, soit directement, soit par ses sels, dans la préparation des différents composés oxygénés du soufre (abstraction faite de tous les détails de préparation industrielle).*

II. — **47**. *On chauffe avec un excès d'acide sulfurique concentré 3gr,320 d'oxalate neutre de potasse.*

Le produit gazeux de la réaction est dirigé dans une enceinte en verre, close, communiquant d'une part avec un manomètre à mercure, d'autre part avec un matras en porcelaine vernie à l'intérieur contenant 20gr de chaux vive et 20gr de carbonate de chaux. L'espace total offert au gaz est de 1lit,300.

On demande quelle sera la force élastique finale et la composition du gaz, l'enceinte étant maintenue à 0° et le matras en porcelaine étant chauffé à 860°. On ne tiendra pas compte de la dilatation du gaz contenu dans le matras chauffé à 860°, le volume de ce gaz étant assez petit par rapport à la capacité de l'enceinte pour que cette correction soit négligeable.

La formule de l'oxalate neutre de potasse est C^4O^6, $2KO$.

La tension de dissociation du carbonate de chaux à 860° est 85mm.

L'équivalent du potassium est 39.

La quantité d'oxalate employée étant $\frac{1}{50^e}$ d'équivalent, comme on s'en assure facilement, la réaction peut se formuler ainsi :

$$\frac{1}{50}(C^4O^6,\ 2KO + S^2O^6) = \frac{1}{50}(2KO,\ S^2O^6 + C^2O^2 + C^2O^4).$$

Elle donne lieu à un dégagement de $\frac{4}{50^e}$ de volume d'oxyde de carbone et d'autant d'acide carbonique; un volume correspondant à 5lit,55, il se produit le même volume :

$$\frac{22,20}{50} = 0^{lit},444$$

de C^2O^2 et de C^2O^4 (si l'on fait le calcul avec les densités pratiques, on trouve des volumes différents : 0lit,485 de C^2O^4; 0lit,448 de C^2O^2). Il y a donc en tout 0lit,888 de gaz à 0°, pression 760.

Dirigé dans une enceinte de $1^{lit},300$, ce gaz prend une pression H donnée par la loi de Mariotte :

$$H = \frac{0.888 \times 760}{1,300} = 519^{mm},138.$$

Les deux gaz étant mélangés à volumes égaux, la pression de chacun d'eux est primitivement $\frac{H}{2}$, c'est-à-dire 259,569. Mais l'acide carbonique, en vertu des lois de la dissociation, s'unit à la chaux jusqu'à ce que sa pression se soit abaissée à 85^{mm} (il est facile de voir qu'il y a plus de chaux qu'il n'en faut), et la pression totale des deux gaz est alors

$$259,569 + 85 = 344^{mm},569 :$$

c'est la pression qu'indiquera le manomètre.

Il reste alors un volume V d'acide carbonique, qui, mesuré à 0°, 760^{mm}, est

$$V = \frac{1,300 \times 85}{760} = 0^{lit},145.$$

L'enceinte contient donc, une fois l'équilibre établi :

$0^{lit},145$ d'acide carbonique, qui pèsent $0^{lit},145 \times 1,98 = 0^{gr},287$;
$0^{lit},444$ d'oxyde de carbone, qui pèsent $0^{lit},444 \times 1,74 = 0^{gr},555$.

On trouve facilement pour la composition en centièmes :

1° *En poids :*	Acide carbonique. . . .	34,085
	Oxyde de carbone. . . .	65,914
		99,999
2° *En volume :*	Acide carbonique. . . .	24,617
	Oxyde de carbone. . . .	75,382
		99,999

(Henri Niewenglowski, élève au lycée Louis-le-Grand.)

III. — **48.** *L'action de l'eau sur un équivalent de trichlorure de phosphore dégage $63^{cal},6$; celle de la potasse étendue sur un équivalent de trichlorure de phosphore dégage $132^{cal},4$; celle de la potasse étendue sur un équivalent d'acide chlorhydrique étendu dégage $13^{cal},7$.*

On demande la chaleur de formation à l'état dissous du phosphite bipotassique.

Les deux cycles

$$\begin{cases} PCl^3 + 6HO = PO^3, 3HO + 3HCl + 63^c,6 \\ 3(HCl + KO) = 3(KCl + HO) + 3 \times 13^c,7 \\ PO^3, 3HO + 2KO = PO^3, 2KO, HO + 2HO + x^c \end{cases}$$

et

$$PCl^3 + 5KO + Aq = PO^3, 2KO, HO + 3KCl + 132^c,4$$

étant équivalents au point de vue thermique, on a

$$63,6 + 41,1 + x = 132,4,$$

d'où l'on tire

$$x = 27,7.$$

Le phosphite bipotassique dissous est donc formé, à partir de l'acide phosphoreux et de la potasse, avec un dégagement de chaleur de $27^{cal},7$.

(Henri Niewenglowski.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École polytechnique (1890) — *(Suite).*

II. — Géométrie analytique.

Construction de courbes.

16. — I. *Coordonnées cartésiennes.*

1. $y = x^2 - 3x + 2 \pm \sqrt{\dfrac{1}{x(x-1)}}$. — Trouver le foyer de la parabole diamétrale.
2. $y = \dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \pm \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.
3. $x = \dfrac{t^3 - 1}{t^3 + 1}$, $y = \dfrac{2t}{t^2 - 1}$.
4. $y^2 = x^2 + \sqrt{\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x}}$.
5. $8x^3 - 27y^3 + 6x^2 - 5xy - 6y^2 - 2x + 3y = 0$. — Trouver les points d'inflexion.
6. $y = \pm\sqrt{x^2 - 3x + 2} \pm \sqrt{x^2 - 1}$.
7. $x^3 - y^3 + x^3 - y = 0$. — Asymptotes. — Points d'inflexion.
8. $3x^3 - y^3 + 3x^2 - xy + 2x - y = 0$. — Trouver la classe.
9. $x = t^2 + 3t + 2$, $y = t^2 - 1$.
10. $x^3y^4 + (x - y)^3 = 0$. — Points de contact des tangentes parallèles à Oy. — Nombre de ces tangentes.
11. $x^7 + y^7 = a^7$. — Étudier l'asymptote.

17. — II. *Coordonnées polaires.*

1. $\rho = e^{\frac{1}{\sin\omega}}$. — Asymptote. — Points d'inflexion.
2. $\rho^3 \cos\dfrac{\omega}{3} + 2\rho\cos 2\omega - (1 + 2\cos\omega) = 0$. — Asymptotes. Sens de la concavité.
3. $6\rho^3 \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\omega - 3\rho\sin\omega + \cos\dfrac{\omega}{2} = 0$.
4. $\rho^2 \operatorname{tg}\omega - 2\rho(1 + \cos\omega) + \cos\omega = 0$.
5. $\rho^3 + 3\rho\operatorname{tg}\omega + 2 = 0$.
6. $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\sin\omega}} \pm \dfrac{1}{\sqrt{\cos\omega}}$.
7. $\rho^2 \sin\omega - 2\rho\cos(\omega - \alpha) + 2\cos\omega = 0$.
8. $\rho = \dfrac{3\cos\omega - \sin\omega}{2\cos 2\omega - 1}$.
9. $\rho = \dfrac{Ae^{m\omega}}{1 + e^{2m\omega}}$. — Trouver les points doubles. Équation de la tangente en un point. On joint ce point au pôle. Trouver l'équation générale de la tangente en chacun des points d'intersection de la droite obtenue et de la courbe.
10. $\rho^m = a^m \cos m\omega$. — Podaire du pôle.
11. $\rho = \dfrac{m}{\omega^2 - \alpha^2}$.

Problèmes.

18. — Équation d'une directrice de la conique représentée par l'équation générale du second degré.

19. — Équation de l'ensemble des six sécantes communes à deux coniques.

20. — Lieu du sommet d'une parabole qui se déplace en restant tangente à une droite donnée en un point donné et qui passe par un point fixe.

21. — Construire une conique connaissant une asymptote et trois tangentes.

22. — On considère toutes les coniques ayant un foyer donné (α, β) et la directrice correspondante donnée $(ux + vy + 1 = 0)$; on mène à ces coniques des tangentes faisant avec Ox un angle donné; lieu du point de contact.

23. — Lieu du point de concours des tangentes communes à une ellipse et à un cercle de rayon constant qui se déplace en restant tangent à l'ellipse.

24. — Lieu du centre d'une ellipse variable d'aire constante dont l'un des sommets et les deux foyers décrivent trois droites données.

25. — Équation de l'ensemble des diamètres conjugués égaux d'une ellipse rapportée à deux axes quelconques.

26. — D'un point M pris sur une ellipse on peut mener, outre la normale en M, trois normales dont les pieds sont A, B, C. Par les points A, B, C, M on peut faire passer deux paraboles. Lieu du point de rencontre de leurs axes et lieu des foyers de ces paraboles, quand le point M décrit l'ellipse.

(A suivre.)

CONCOURS DE 1890 *(Suite)*.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épreuves d'admissibilité.

Mathématiques.

49. — Entre les coordonnées x, y d'un point A et les coordonnées u et v d'un point B, on établit les relations

$$x = \frac{u^3 + \lambda u v^2}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{v^3 + \lambda v u^2}{u^2 + v^2},$$

où λ est un nombre positif donné.

Après avoir déduit de ces relations l'équation qui relie les coefficients angulaires α, β des droites qui joignent l'origine aux points A, B, on montrera que, en général, à chaque point A correspondent trois positions du point B : ces points B_1, B_2, B_3 peuvent-ils être réels et distincts? Où le point A doit-il se trouver pour qu'il en soit ainsi? Sur quel lieu doit-il être situé pour que deux de ces points, B_2 et B_3, par exemple, soient confondus? Si le point A décrit ce lieu, quels sont les lieux décrits par les points confondus B_2, B_3 et par le point B_1?

50. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on prend sur l'axe des x un point fixe A, sur l'axe des y un point fixe B, et l'on mène par le point O une parallèle à la droite AB. On considère un système de trois cercles assujettis à avoir même axe radical et à être tangents, le premier en A à l'axe des x, le second en B à l'axe des y, le troisième en O à la parallèle à AB.

Démontrer que l'axe radical des trois cercles passe par un point fixe.

Trouver le lieu des points communs à ces trois cercles : on indiquera quelle est en général la forme de cette courbe, et l'on examinera en particulier le cas où l'angle A du triangle OAB est égal à $\frac{\pi}{6}$.

(Durée de l'épreuve : 6 heures.)

Physique.

I. — Montrer que la différence constatée par Regnault entre les deux coefficients de dilatation d'un même gaz est d'accord avec la manière dont le gaz s'écarte de la loi de Mariotte.

II. — *Voir le numéro de novembre, page 23.*

(Durée : 6 heures.)

Épreuve d'admission.

Épure.

51. — Trouver la méridienne principale d'une surface de révolution.

L'axe de révolution passe par les points

(α, α')	ayant pour coordonnées :	$x = 0$,	$y = 10^{cm}$,	$z = 7^{cm}$.
(β, β')	— —	$x = -7$,	$y = 10$,	$z = 0$.

La courbe qui décrit la surface est une ellipse, contenue dans le plan horizontal $z = 7^{cm}$. Sa projection horizontale a pour sommets opposés les points

a	$x = 0$,	$y = 10$,
b	$x = 6$,	$y = 16$.

Elle passe de plus par le point c $x = 9$, $y = 10$.

On établira la ponctuation de la surface engendrée, seulement en projection verticale.

Faire les constructions pour un point quelconque, la tangente en ce point, et les points remarquables.

(Durée : 4 heures.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physique et Chimie.

I. — Achromatisme des lentilles.

II. — Dilatation de l'eau.

III. — Oxyde de carbone.

N. B. — On tiendra compte de la concision avec laquelle sera rédigée la composition.

(3 heures.)

Mathématiques.

Voir le numéro d'octobre, page 1.

(4 heures.)

Calcul trigonométrique.

Dans un triangle ABC, on donne : $b = 5828^m,755$, $c = 4754^m,824$, $A = 75^\circ\, 35'\, 45''$.

Calculer le côté a, les angles B et C, et la surface du triangle.

(1 h. 1/2.)

Résultats : $a = 6541^m,722$, $B = 59^\circ\, 39'\, 19'',9$, $C = 44^\circ\, 44'\, 55'',1$, $S = 1342^h\, 17^a\, 50^c$.

Géométrie descriptive.

52. — Un cube de 15^{cm} de côté a l'une de ses trois directions d'arêtes verticale, et une autre perpendiculaire au plan vertical.

Dans la face postérieure, considérons l'arête de gauche, l'arête inférieure et le sommet situé à l'intersection des deux autres arêtes.

La droite passant par ce sommet et par le sommet opposé du cube, engendrerait, si elle tournait successivement autour des deux arêtes considérées, deux hyperboloïdes qu'on suppose remplis.

Représenter, par ses projections, le corps formé par la partie commune aux deux solides ainsi obtenus, en le limitant en haut et en bas par les plans des deux faces horizontales du cube, et en arrière par celui de la face postérieure.

On placera au centre du cadre de l'épure la projection horizontale du point de rencontre des axes des deux hyperboloïdes, et, à un centimètre au-dessus, sur une parallèle aux petits côtés, la projection verticale du même point.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

On n'indiquera aucune asymptote.

(4 heures.)

QUESTIONS PROPOSÉES

53. — Vraie valeur de l'expression $(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}$ pour $x = \infty$.

***54.** — On donne une circonférence de centre O et de rayon a. Sur un de ses diamètres, on prend un point M, et de ce point on mène une des tangentes à la circonférence; soit P le point de contact. On demande le lieu des points X et X′ qui partagent le segment de droite PM en moyenne et extrême raison quand le point M parcourt le diamètre AB.

(A. Audouin, élève de marine, lycée de Cherbourg.)

Plus généralement, lieu du point qui partage le segment PM dans un rapport donné.

55. — On donne deux cercles fixes C, C′ et l'on considère deux cercles variables S, S′ tangents aux premiers. Lieu des points de Poncelet relatifs aux cercles S, S′.

(PILLEUX, élève au lycée Louis-le-Grand.)

56. — Lieu des pieds des normales issues de l'origine à une parabole de grandeur constante qui se déplace en restant tangente aux axes de coordonnées supposés rectangulaires.

57. — Lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde et qui sont coupés par un plan donné suivant un cercle.

58. — Étant donné un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, on décrit de l'origine comme centre, dans le plan des xy, un cercle C de rayon R, et on prend sur l'axe des x un point A, à une distance a de l'origine. On mène par A une sécante rencontrant le cercle aux points M et N. Sur MN comme diamètre, dans un plan perpendiculaire au plan des xy, on décrit un cercle C′.

1° Lieu des centres des quadriques S qui passent par les cercles C et C′, quand la sécante tourne autour du point A.

2° Séparer sur la surface obtenue les régions qui correspondent aux centres des différents genres de quadriques.

3° Trouver la surface Σ, lieu des axes des paraboloïdes passant par les cercles C et C′.

4° Étudier la surface Σ, en la coupant par des plans parallèles aux plans de coordonnées. Trouver son contour apparent sur le plan des zx.

5° Indiquer un mode de génération simple de la surface Σ, basé sur des considérations élémentaires.

(Concours académique, Nancy et Besançon, 1879.)

***59.** — Un point S, de cote 9^{cm}, est le sommet d'un cône qui a pour directrice dans le plan horizontal de projection un cercle de rayon $4^{cm},5$ tangent à xy et dont le centre O est en avant de xy. Un second cône, dont le sommet T a pour cote 6^{cm}, a pour directrice dans le plan horizontal de projection un cercle de rayon 3^{cm}, qui coupe orthogonalement le cercle O et dont le centre I est dans le plan de profil de O en avant de O. Ces deux cônes ont une génératrice commune verticale située à gauche du plan de profil de I.

1° Construire les projections de l'intersection des deux cônes limités d'une part au plan horizontal de projection et d'autre part au plan horizontal qui a pour cote 11^{cm}.

2° Représenter le cône de sommet T supposé plein et existant seul en enlevant la portion comprise dans le cône de sommet S.

On placera le point O sur la ligne de rappel du milieu de la feuille et la ligne de terre parallèle aux petits côtés de la feuille, à égale distance de chacun d'eux.

ERRATA du n° 3. — Page 46, ligne 2 en remontant : au lieu de e, lire $e^{\frac{1}{x}}$. — Page 47, ligne 3, en remontant : au lieu de : rapport, lire produit. — Page 47, exercice 13, au lieu de : $S + 4\lambda$, lire $5 + 4\lambda$. — Page 48, ligne 4, au lieu de : $u_n + 1$, lire u_{n+1}.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 28382-12-90.

1re Année. N° 5. Février 1891.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

37. — *On sait que si, quand* n *croît indéfiniment,* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *a une limite,* $\sqrt[n]{u_n}$ *a la même limite* (u_n *étant supposé positif quel que soit l'entier* n *). Démontrer que si* $\sqrt[n]{u_n}$ *a une limite* λ, *et si, en outre, en posant* $\sqrt[n]{u_n} = \lambda + \alpha_n$, *le produit* $n\alpha_n$ *a une limite finie et déterminée quand* n *croît indéfiniment, dans ce cas,* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *a aussi pour limite* λ *quand* n *croît indefiniment.*

Appliquer la règle précédente à la série 1, a, ab, a^2b, a^2b^2, ... a^nb^n, $a^{n+1}b^n$, ...

Si l'on pose $\sqrt[n]{u_n} = \lambda + \alpha_n$, on a, en supposant $\lambda \neq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\lambda + \alpha_{n+1})^{n+1}}{(\lambda + \alpha_n)^n} = \frac{\left(1 + \frac{\alpha_{n+1}}{\lambda}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{\alpha_n}{\lambda}\right)^n} \lambda.$$

Posons $\frac{n\alpha_n}{\lambda} = \omega_n$; on peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \frac{\left(1 + \frac{\omega_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{\omega_n}{n}\right)^n}.$$

Donc si ω_n a une limite ω quand n grandit indéfiniment, on a

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \frac{e^\omega}{e^\omega} = \lambda.$$

Si $n\alpha_n$ oscille entre des limites finies, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite.

Si $n\alpha_n$ grandit indéfiniment, ce qui précède ne suffit plus pour décider si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a une limite.

Supposons maintenant que $\sqrt[n]{u_n}$ ait pour limite zéro, et posons $\sqrt[n]{u_n} = \alpha_n$. $n\alpha_n = \beta_n$, de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(\beta_{n+1})^{n+1}}{(\beta_n)^n}.$$

Supposons $\lim \beta_n = k$ quand n grandit indéfiniment, et soit $k \neq 0$.

Posons $v_n = (\beta_n)^n$, de sorte que $\lim \sqrt[n]{v_n} = k$. Soit $\sqrt[n]{v_n} = k + \gamma_n$.

Si le produit $n\gamma_n$ a une limite finie et déterminée ou seulement s'il reste fini quand n grandit indéfiniment, on voit que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ restera fini; or $\lim \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{v_{n+1}}{v_n}$; donc on a bien $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

Dans l'hypothèse $k \neq 0$, le théorème ne tombe en défaut que si $n\alpha_n$ croît indéfiniment avec n. Si $k = 0$, on fera pour v_n ce qu'on a fait pour u_n, et ainsi de suite.

Application. — Considérons la série

$$a, \quad ab, \quad a^2b, \quad a^2b^2, \quad \ldots \qquad a^pb^p, \quad a^{p+1}b^p, \quad \ldots$$

On a $\qquad u_1 = a, \quad u_2 = ab, \ldots \qquad u_{2p} = a^pb^p, \quad u_{2p+1} = a^{p+1}b^p, \quad \ldots$

Donc $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} . b^{\frac{p}{2p+1}}$, de sorte que $\lim \sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = \sqrt{ab}$; on peut donc dire que $\lim \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}$ tandis que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ oscille entre a et b.

Or on voit que $n\alpha_n = 0$ si $n = 2p$; quand $n = 2p + 1$, on a

$$n\alpha_n = (2p + 1)\left[a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}} - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\right] = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} . (2p + 1)\left[\sqrt[2p+1]{\sqrt{\frac{a}{b}}} - 1\right].$$

Mais on sait que $m(\sqrt[m]{x} - 1)$ a pour limite $\mathrm{L}.x$ quand m grandit indéfiniment, donc, dans le cas présent, quand n grandit indéfiniment par valeurs impaires, $\lim n\alpha_n = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \mathrm{L} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \mathrm{L} \frac{a}{b}$.

Donc si a est différent de b, $n\alpha_n$ n'a pas de limite; si $a = b$, $n\alpha_n$ a pour limite zéro et alors $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \sqrt[n]{u_n} = a$.

(C. Bourlet.)

Nous avons reçu une solution exacte, mais incomplète de M. J. Vigneaux, élève du lycée de Toulouse.

---

40 — *On donne* n *points dans un plan; par cinq de ces points on fait passer des coniques de toutes les façons possibles; trouver le nombre de points de rencontre de ces coniques, autres que les* n *points donnés.*

On suppose que parmi ces n points, il n'y en a pas plus de cinq sur une même conique. Il y a en tout C_n^5 coniques.

Chaque combinaison de deux coniques donne quatre points en général,

$$x = 4C^2_{C_n^5} - nz,$$

z étant le nombre de fois que chacun des n points a été compté. Or par l'un de ces points passent C_{n-1}^4 coniques, et chaque fois que j'ai pris deux de ces coniques, j'ai compté ce point une fois, je l'ai donc compté $C^2_{C_{n-1}^4}$ fois.

D'où

$$x = 4C^2_{C_n^5} - nC^2_{C_{n-1}^4}.$$

H. Pilleux, élève au lycée Louis-le-Grand.

Solutions semblables par MM. Auzeraud (lycée de Toulouse); E. Jossinet (lycée de Troyes); Auguste Lecoquierre (lycée de Rouen); Perrée (lycée Condorcet).

M. Husson, élève au lycée de Nancy, généralise la question et considère des courbes de degré p; en posant $\frac{p(p+3)}{2} = r$, il fait passer par r des n points donnés une courbe de degré p; le nombre des points communs à toutes les courbes ainsi obtenues est égal à

$$p^2 C^2_{C_n^r} - n\, C^2_{C_{n-1}^r}.$$

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

13. — *Si des milieux des côtés d'un triangle comme centres, on décrit trois circonférences avec des rayons tels que l'un d'eux soit égal à la somme ou à la différence des deux autres, les trois points de rencontre des trois couples de polaires de deux des cercles par rapport à un sommet commun pris comme pôle sont trois points en ligne droite.*

Soient M, N, P les milieux des côtés du triangle ABC; R, R′, R″ les rayons respectifs des cercles décrits de ces points comme centres.

Prenons BC pour axe des x, et la hauteur AD pour axe des y. Soient β et γ les abscisses des sommets B et C, et h l'ordonnée de A. Le cercle (N) ayant pour équation

$$\left(x-\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(y-\frac{h}{2}\right)^2=R'^2,$$

l'équation de la polaire de A est

$$-\frac{\gamma}{2}\left(x-\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{h}{2}\left(y-\frac{h}{2}\right)-R'^2=0$$

ou

$$2hy-2\gamma x=h^2-\gamma^2+4R'^2. \tag{1}$$

Pareillement, la polaire de A par rapport au cercle (P) a pour équation

$$2hy-2\beta x=h^2-\beta^2+4R''^2. \tag{2}$$

Les coordonnées du point de rencontre S de ces deux droites sont

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{\beta+\gamma}{2}+2\frac{R'^2-R''^2}{\beta-\gamma}\\ y_1&=\frac{h^2+\beta\gamma}{2h}+2\frac{\beta R'^2-\gamma R''^2}{h(\beta-\gamma)}\end{aligned}\right\} \tag{S}$$

La polaire de C par rapport au cercle (N) a pour équation

$$2\gamma x-2hy=\gamma^2-h^2+4R'^2. \tag{3}$$

La polaire du même point par rapport au cercle (M) qui a pour équation

$$\left(x-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2+y^2=R^2,$$

est déterminée par l'équation

$$\frac{\gamma-\beta}{2}\left(x-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=R^2$$

ou

$$x=\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{2R^2}{\gamma-\beta}. \tag{4}$$

En portant cette valeur de x dans l'équation (3), on obtient les coordonnées x_3, y_3 du point de rencontre S″ des polaires de C par rapport aux cercles (M), (N) et l'on aura de même x_2, y_2, coordonnées du point de rencontre S′ des polaires de B par rapport aux cercles (M), (P), de sorte que

$$\left.\begin{aligned} x_2&=\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{2R^2}{\gamma-\beta}\\ y_2&=\frac{h^2+\beta\gamma}{2h}+2\frac{R^2\beta+R'^2(\gamma-\beta)}{h(\beta-\gamma)}\end{aligned}\right\} \tag{S'}$$

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{2R^2}{\gamma-\beta} \\ y_3 &= \frac{h^2+\beta\gamma}{2h} + 2\frac{R^2\gamma + R''^2(\beta-\gamma)}{h(\gamma-\beta)} \end{aligned}\right\} \qquad (S'')$$

Prenons pour axes deux nouveaux axes parallèles aux premiers et ayant pour origine le point de coordonnées $x_0 = \frac{\beta+\gamma}{2}$, $y_0 = \frac{h^2+\beta\gamma}{2h}$, c'est-à-dire le centre du cercle circonscrit au triangle ABC; les nouvelles coordonnées seront données par les formules

$$x_1 = 2\frac{R'^2 - R''^2}{\beta-\gamma}, \quad y_1 = 2\frac{\beta R'^2 - \gamma R''^2}{h(\beta-\gamma)}; \quad x_2 = \frac{2R^2}{\beta-\gamma}, \quad y_2 = 2\frac{R^2\beta - R''^2(\beta-\gamma)}{h(\beta-\gamma)};$$

$$x_3 = -\frac{2R^2}{\beta-\gamma}, \quad y_3 = -2\frac{R^2\gamma + R'^2(\beta-\gamma)}{h(\beta-\gamma)}.$$

La condition pour que ces points soient en ligne droite est

$$\begin{vmatrix} R'^2 - R''^2 & \beta R'^2 - \gamma R''^2 & 1 \\ R^2 & +R^2\beta - R''^2(\beta-\gamma) & 1 \\ -R^2 & -R^2\gamma - R'^2(\beta-\gamma) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ce qui donne, en développant suivant les éléments de la seconde colonne,

$$(\beta-\gamma)(R+R'+R'')(R-R'+R'')(R+R'-R'')(R'+R''-R) = 0.$$

$\beta - \gamma$ est différent de zéro, les rayons sont supposés positifs, donc la condition demandée est bien que l'un des rayons soit égal à la somme ou à la différence des deux autres.

---

15. — *On considère les droites dont l'équation générale est, en coordonnées rectangulaires,*

$$(1-\lambda^2)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)a = 0, \qquad (1)$$

λ désignant un paramètre variable.

1° Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener deux droites rectangulaires.

2° Trouver le lieu des points tels que les deux droites issues de chacun d'eux, interceptent une longueur donnée sur l'axe des x.

3° Trouver les coordonnées du point Q où se coupent les sécantes qui joignent les points d'intersection des axes avec les droites issues du point P, et en déduire le lieu des points P tels que les points P et Q soient vus de l'origine sous un angle droit.

1° Les droites considérées sont définies par l'équation

$$(1-\lambda^2)x + 2\lambda y + (\lambda^2 - 2\lambda - 3)a = 0. \qquad (1)$$

Les valeurs de λ qui correspondent aux droites passant par le point M (x, y) sont les racines de

$$(a-x)\lambda^2 + 2(y-a)\lambda + x - 3a = 0. \qquad (2)$$

Appelons λ_1 et λ_2 ces racines. La condition d'orthogonalité de deux droites passant par le point M est

$$(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2) + 4\lambda_1\lambda_2 = 0$$

ou

$$(\lambda_1\lambda_2)^2 - (\lambda_1+\lambda_2)^2 + 6\lambda_1\lambda_2 + 1 = 0,$$

d'où

$$(x-3a)^2 - 4(y-a)^2 + 6(x-3a)(a-x) + (a-x)^2 = 0,$$

ce qui, après réduction, peut s'écrire

$$x^2 + y^2 - 4ax - 2ay + 3a^2 = 0$$

ou

$$(x-2a)^2 + (y-a)^2 = (a\sqrt{2})^2. \qquad (3)$$

Le lieu est donc un cercle.

2° Le point où la droite (1) coupe l'axe des x a pour abscisse $x = a\frac{\lambda_2 - 2\lambda - 3}{\lambda_2 - 1} = a\frac{\lambda - 3}{\lambda - 1}$.

Si $2a\mu$ est la longueur donnée, nous devrons avoir : $\frac{\lambda_1 - 3}{\lambda_1 - 1} - \frac{\lambda_2 - 3}{\lambda_2 - 1} = \pm 2\mu$,

d'où, en chassant les dénominateurs et réduisant,

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \pm \mu[\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + 1].$$

d'où $$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = \mu^2[\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + 1]^2,$$

d'où $$4(y - a)^2 - 4(x - 3a)(a - x) = \mu^2[(x - 3a) + 2(y - a) + (a - x)]^2,$$

ou, après réduction, $$(x - 2a)^2 + y(y - 2a) - \mu^2(y - 2a)^2 = 0. \qquad (4)$$

Cette équation représente une conique qui passe, quel que soit μ, au point de coordonnées $x = y = 2a$, la tangente en ce point étant parallèle à l'axe des x. On voit que les deux droites définies par l'équation (1) issues de ce point sont parallèles aussi à l'axe des x, car en supposant $x = y = 2a$, l'équation (2) a ses deux racines égales à 1, et cette valeur de λ annule le coefficient de x dans l'équation (1).

En discutant l'équation (4) on trouve facilement que pour $\mu > 1$ on a une hyperbole ; pour $\mu = 1$ on a une parabole dont l'axe est $x = 2a$ et qui passe par l'origine; pour $\mu < 1$ on a une ellipse. Enfin pour $\mu = 0$ on a un cercle, dont l'équation peut s'écrire

$$(x - 2a)^2 + (y - a)^2 = a^2. \qquad (5)$$

Ce lieu correspond au cas où $\lambda_1 = \lambda_2$, c'est-à-dire au cas où les deux droites issues du point (x, y) se confondent; c'est donc l'enveloppe des droites (1).

3° Soient x, y les coordonnées de P, et soient x', y' les coordonnées de Q; la condition d'orthogonalité des droites OP et OQ est

$$xx' + yy' = 0.$$

D'autre part, le point Q est sur la polaire de P par rapport aux axes, donc on a aussi

$$yx' + xy' = 0.$$

Éliminant x' et y', on a $$y^2 - x^2 = 0;$$

on a aussi $$y'^2 - x'^2 = 0,$$

donc les points P et Q décrivent les deux bissectrices des angles des axes.

Ce résultat reste le même si l'on considère les droites représentées par l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

où A, B, C sont des trinomes quelconques du second degré en λ.

Pour calculer les coordonnées du point Q, dans le cas particulier donné, remarquons que la droite (λ_1) coupe l'axe des x au point $x_1 = a\frac{\lambda_1 - 3}{\lambda_1 - 1}$, $y_1 = 0$ et la droite (λ_2) coupe l'axe des y au point $x_2 = 0$, $y_2 = -a\frac{\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 3}{2\lambda_2}$; donc les coordonnées du point Q vérifient l'équation

$$x'\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - 3} - y'\frac{2\lambda_2}{\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 3} - a = 0.$$

Mais l'équation (1) donne $\frac{2\lambda_2 y}{\lambda_2^2 - 2\lambda_2 - 3} = x\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - 3} - a$;

donc $$x'\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - 3} - \frac{y'}{y}\left(x\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - 3} - a\right) - a = 0$$

ou $$x'y\frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - 3} - y'\left(x\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_2 - 3} - a\right) - ay = 0. \qquad (6)$$

On a de même
$$x'y\left(\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2-3}\right)-y'\left(x\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1-3}-a\right)-ay=0. \qquad (7)$$

En retranchant membre à membre (6) et (7), on retrouve d'abord
$$x'y-y'x=0,$$
puis, posant $x'=\mu x$, $y'=\mu y$ et portant dans l'équation (6), on obtient
$$\mu\left[xy\left(\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1-3}+\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2-3}\right)-ay\right]=ay.$$

Or,
$$\frac{\lambda_1-1}{\lambda_1-3}+\frac{\lambda_2-1}{\lambda_2-3}=\frac{2\lambda_1\lambda_2-4(\lambda_1+\lambda_2)-6}{\lambda_1\lambda_2-3(\lambda_1+\lambda_2)+9}=\frac{2x-4y+4a}{4x-3y},$$
d'où l'on tire
$$\mu=\frac{a(4x-3y)}{2x^2-4yx+3ay},$$
et par conséquent x' et y' sont connues.

L. Randon, élève du lycée Louis-le-Grand.

(Autres bonnes solutions : MM. Perrin, Condorcet ; Geneix-Chabanier (Marseille).)

M. J.-G. Darboux remarque que les droites considérées sont tangentes au cercle ayant pour équation : $(x-2a)^2+(y-a)^2=a^2$. Il en résulte immédiatement que le premier lieu est un cercle concentrique et de rayon $a\sqrt{2}$.

---

18. — *Étant données deux coniques homofocales, trouver le lieu des sommets des angles droits* AMA′ *dont les côtés* MA, MA′ *touchent respectivement les deux courbes.*

Les deux autres tangentes MB *et* MB′ *menées de* M *aux deux coniques se coupent aussi à angle droit.*

Les droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes MA *et* MA′ *ou* MB *et* MB′ *enveloppent une conique homofocale aux proposées.*

Le diamètre qui passe par le point M *passe aussi par les milieux des cordes de contact des tangentes* MA *et* MA′ *ou* MB *et* MB′.

Soient
$$a^2u^2+b^2v^2-w^2=0, \qquad (1)$$
$$(a^2+\lambda)u^2+(b^2+\lambda)v^2-w^2=0 \qquad (2)$$
les équations tangentielles des deux coniques. L'équation aux paramètres angulaires u, v des tangentes à la première conique issues du point M (x, y), s'obtiendra en éliminant w entre l'équation (1) et l'équation tangentielle du point M
$$ux+vy+w=0.$$
On obtient
$$(a^2-x^2)u^2+2uvxy+(b^2-y^2)v^2=0. \qquad (3)$$

L'équation aux paramètres angulaires des perpendiculaires aux tangentes à la seconde conique issues de M sera alors
$$(b^2+\lambda-y^2)u^2-2uvxy+(a^2+\lambda-x^2)v^2=0. \qquad (4)$$

On aura l'équation du lieu, en écrivant que ces deux équations ont une solution commune en $\frac{u}{v}$, c'est-à-dire en éliminant u et v entre ces deux équations. Si on les ajoute, il vient
$$(a^2+b^2+\lambda-x^2-y^2)(u^2+v^2)=0.$$

L'équation du lieu cherché est donc $x^2+y^2=a^2+b^2+\lambda$.

C'est un cercle qui a son centre à l'origine ; il passe par les points communs aux deux coniques, ce qui était facile à prévoir, puisque en ces points les deux coniques se coupent à angle droit.

On peut observer que le facteur u^2+v^2 correspond aux foyers des deux coniques, qui, analytique-

ment font partie du lieu, car les tangentes menées de ces points aux deux coniques sont les droites isotropes, et ces droites sont perpendiculaires sur elles-mêmes.

Pour tout point du cercle, les équations (3) et (4) sont les mêmes, elles ont mêmes racines ; cela démontre la deuxième partie, qui résulte d'ailleurs d'un théorème bien connu.

Cherchons maintenant l'enveloppe de la droite AA′. Soient u_0, v_0, w_0 ses coordonnées. Nous allons former l'équation aux paramètres angulaires des tangentes menées à la conique (1) aux points de rencontre avec AA′. Soient (u, v, w) les coordonnées de l'une de ces tangentes ; on doit avoir

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

et

$$a^2uu_0 + b^2vv_0 - ww_0 = 0.$$

Cette dernière équation s'obtient en écrivant que les deux droites (u, v, w) et (u_0, v_0, w_0) sont conjuguées par rapport à la conique (1).

Éliminant w, on a l'équation cherchée :

$$(a^2uu_0 + b^2vv_0)^2 - w_0^2(a^2u^2 + b^2v^2) = 0,$$

ou

$$a^2u^2(a^2u_0^2 - w_0^2) + 2a^2b^2uvu_0v_0 - b^2v^2(b^2v_0^2 - w_0^2) = 0. \qquad (5)$$

Remplaçant a^2 et b^2 par $a^2 + \lambda$ et $b^2 + \lambda$, puis, dans cette dernière équation, remplaçant $\frac{u}{v}$ par $-\frac{v}{u}$, on aura l'équation aux paramètres angulaires des perpendiculaires menées aux tangentes à la deuxième conique aux points de rencontre avec la droite (u_0, v_0, w_0). Cette équation est

$$(b^2 + \lambda)u^2[(b^2 + \lambda)v_0^2 - w_0^2] - 2(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)uvu_0v_0 + (a^2 + \lambda)v^2[(a^2 + \lambda)u_0^2 - w_0^2] = 0. \quad (6)$$

Éliminant u et v entre (5) et (6), on aura l'enveloppe de la droite (u_0, v_0, w_0). Si nous multiplions (5) par $(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)$, (6) par a^2b^2 et ajoutons, il vient

$$[a^2(b^2 + \lambda)u^2 + b^2(a^2 + \lambda)v^2][(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2)(a^2 + b^2 + \lambda) - a^2b^2(u_0^2 + v_0^2)] = 0,$$

ce qui montre que l'enveloppe cherchée est la conique ayant pour équation tangentielle

$$(a^2u_0^2 + b^2v_0^2 - w_0^2)(a^2 + b^2 + \lambda) - a^2b^2(u_0^2 + v_0^2) = 0.$$

Cette conique est homofocale à la conique (1).

Remarquons que le facteur $a^2(b^2 + \lambda)u^2 + b^2(a^2 + \lambda)v^2$ nous donne, comme faisant partie de l'enveloppe, les quatre points de rencontre des deux coniques. Éliminant, en effet, u et v entre (5) et (7)

$$a^2(b^2 + \lambda)u^2 + b^2(a^2 + \lambda)v^2 = 0, \qquad (7)$$

on obtient une condition exprimant que la droite (u_0, v_0, w_0) passe par l'un des quatre points de rencontre des deux coniques. Ce résultat se prévoyait aisément, puisqu'en ces points les coniques sont orthogonales.

Il nous reste à établir que le diamètre du point M passe par le milieu de AA′. Pour cela, soient x_1, y_1 ; x_2, y_2 les coordonnées des points A et A′. Écrivons que la droite qui joint l'origine au point de rencontre des tangentes aux deux coniques en A et A′, passe par le milieu de AA′ ; on obtient la relation à établir :

$$\frac{x_1 + x_2}{2}\left[\frac{x_1}{a^2} - \frac{x_2}{a^2 + \lambda}\right] + \frac{y_1 + y_2}{2}\left[\frac{y_1}{b^2} - \frac{y_2}{b^2 + \lambda}\right] = 0;$$

on peut sans peine la mettre sous la forme

$$\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x_2^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y_2^2}{b^2 + \lambda} - 1\right) + \lambda\left[\frac{x_1x_2}{a^2(a^2 + \lambda)} + \frac{y_1y_2}{b^4(b^2 + \lambda)}\right] = 0, \qquad (3)$$

laquelle est évidemment satisfaite, puisque les points A et A′ sont respectivement sur les coniques (1) et (2), et que les tangentes en ces points sont perpendiculaires.

Remarques. — I. — Cette dernière partie peut s'établir géométriquement : soit en effet $A_1M_1A'_1$ une position infiniment voisine de l'angle droit AMA', α et α' les points d'intersection de MA, M_1A_1; M'A', $M_1A'_1$; le quadrilatère $\alpha MM_1\alpha'$ est inscriptible; soit C_1 le cercle correspondant. A la limite, les points α, α' sont venus en A et A'; le cercle C_1 devient le cercle C de diamètre AA' et touchant en M le cercle, lieu de M. On voit donc que la normale en M au cercle C, c'est-à-dire le diamètre passant par M, passe aussi par le milieu de AA'.

II. — Transformons la figure donnée par polaires réciproques, en prenant comme conique directrice un cercle quelconque ayant pour centre un des foyers communs F. Aux deux coniques correspondent deux cercles, de plus la droite de l'infini ayant même pôle par rapport aux coniques, l'origine F aura même polaire par rapport aux cercles transformés. Ce sera l'un des points limites. On est ramené à un problème concernant les cercles; ce problème se trouve résolu dans la *Géométrie supérieure* de Chasles, chapitre XXXI.

(Henri Larose, élève au lycée de Caen.)

Solutions analogues par MM. Leo. Darboux (Louis-le-Grand), Drin (Lycée de Lille), R. Laforgue (à Montauban).

---

27. — *Étant donnés quatre points en ligne droite* A, B, C, D, *peut-on tracer une parabole passant par les points* C *et* D, *dont l'axe passe par* A *et la tangente au sommet par* B?

Montrer qu'en général le problème est impossible. Trouver dans quel cas il est possible, et montrer que dans ce cas il est possible d'une infinité de manières, et trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à toutes ces paraboles, parallèlement à la droite donnée.

Prenons la droite donnée pour axe des x, le point A pour origine, et pour axe des y une perpendiculaire à AB.

Soient b, c, d les abscisses des points B, C, D.

Par le point A, je mène une droite quelconque de coefficient angulaire m; et par B une perpendiculaire à cette droite. L'équation générale des paraboles ayant ces deux droites respectivement pour axe et pour tangente au sommet est

$$(y - mx)^2 + 2\lambda(x + my - b) = 0. \qquad (1)$$

J'écris que cette parabole passe par les points C et D, c'est-à-dire que l'équation obtenue en faisant $y = 0$ a pour racines c et d. On obtient

$$-\frac{2\lambda}{m^2}(c + d), \qquad -\frac{2\lambda b}{m^2} = cd; \qquad (2)$$

Il est impossible en général de trouver des valeurs de λ et de m^2 satisfaisant à ces deux équations; par conséquent il n'existe pas en général de parabole répondant à la question.

Pour que le problème soit possible, il faut que les équations (2) donnent la même valeur pour $\frac{\lambda}{m^2}$, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{b} = \frac{c + d}{cd} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Ce résultat s'interprète très simplement. Soit en effet B', d'abscisse b', le point conjugué harmonique de A par rapport à C et D; on a

$$\frac{2}{b'} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

On doit donc avoir $b = \frac{b'}{2}$, ce qui montre que le point B doit être le milieu du segment AB'.

Supposons cette condition remplie, les équations (2) sont compatibles; prenons la première, et soit p l'abscisse du milieu P de CD. On a alors $\lambda = -m^2p$, et l'équation générale des paraboles devient

$$(y - mx)^2 - 2m^2p(x + my - b) = 0.$$

Le point de contact de la tangente parallèle à Ox est à l'intersection de la parabole et du diamètre conjugué de Ox, qui a pour équation

$$y - m(x - p) = 0. \qquad (4)$$

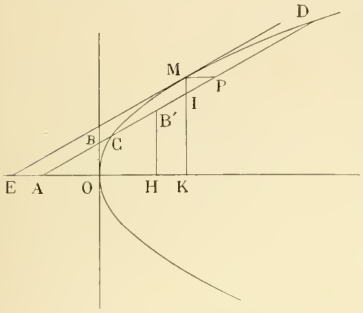
Éliminant m entre (3) et (4), on a l'équation du lieu qu'on obtient aisément sous la forme

$$2y^2 + (x - p)(2x - 2b - p) = 0.$$

C'est un cercle qui a son centre sur Ox, et qui rencontre cet axe aux deux points d'abscisse p et $\frac{2b + p}{2}$. Si I est le milieu de PB′, on voit que le cercle est décrit sur PI comme diamètre.

(Camille Rech, à Nancy.)

(Solutions analogues par MM. A. Pouillard, Ronzel, élèves au lycée de Clermont.)



Solution géométrique. — Imaginons une parabole répondant à la question; la polaire de A coupe CD en un point B′ conjugué harmonique de A par rapport à CD, et tel en même temps que B soit le milieu de AB′. Donc pour que le problème soit possible, il faut que le point B soit le milieu de AB′. Si cette condition est remplie, il y a une infinité de paraboles satisfaisant aux conditions données.

Considérons l'une de ces paraboles et menons-lui la tangente ME parallèle à AB.

Menons MP parallèle et MK perpendiculaire à l'axe. Le point P est le milieu de CD; d'autre part, comme O est le milieu de AH et de EK, on a HK = AE = MP; par suite I est le milieu de PB′. Les deux points P et I étant fixes, le lieu du point M est le cercle décrit sur PI comme diamètre.

(Ernest Duporcq, élève à l'école Monge.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École polytechnique (1890). — (*Suite.*)

27. — Où doit être placé le point (α, β) pour que les deux coniques ayant pour équations

$$\alpha x^2 - 2xy + \beta y^2 - x = 0,$$
$$x^2 + 3\alpha\beta xy - y^2 - 1 = 0$$

soient tangentes ?

28. — Former l'équation générale d'une cubique ayant une asymptote double donnée.

29. — Une conique se déplace dans son plan et se déforme de façon que deux sommets décrivent deux côtés non parallèles d'un rectangle et que les deux foyers se déplacent sur les deux autres côtés. Lieu du centre et des deux autres sommets.

30. — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse et passant par son centre.

31. — On considère une conique et une parabole variable tangente à cette conique en un point donné C; on donne en outre la direction de l'axe de cette parabole et l'on demande le lieu du centre du cercle passant par le point C et les deux autres points de rencontre de la conique et de la parabole.

32. — Lieu du point tel que l'une des trois normales menées de ce point à une parabole soit bissectrice de l'angle formé par les deux autres.

33. — On donne la conique représentée par l'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$. Trouver les longueurs des diamètres conjugués qui font entre eux un angle de 45°.

34. — Former l'équation générale des hyperboles ayant une asymptote donnée, dont l'axe transverse passe par un point donné, l'axe imaginaire ayant une longueur donnée $2b$.

35. — Dans une conique on donne un foyer, un point de l'axe non focal et un point de la tangente en un sommet de l'axe focal. — Former l'équation générale des coniques satisfaisant aux conditions données et construire l'hyperbole équilatère faisant partie de cette famille de coniques.

36. — Lieu du centre d'un cercle tangent à une hyperbole équilatère et à une de ses asymptotes.

37. — En un point M d'une ellipse, on mène la normale, qui rencontre la courbe en un second point M'; lieu du centre du cercle passant par les points M, M' et par le centre de l'ellipse.

38. — Lieu des foyers des coniques tangentes à deux droites rectangulaires, passant par un point fixe et ayant une aire constante.

39. — Lieu du centre des coniques d'aire constante et inscrites dans un triangle.

40. — Former l'équation de la conique tangente aux cinq droites ayant pour équations :

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad y = -1, \quad 2x - y - 2 = 0.$$

41. — Aux extrémités A, B de deux diamètres conjugués d'une conique, on mène les normales, qui se coupent en M. Lieu de M et lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABM.

42. — Une parabole de grandeur constante passe par deux points fixes A, B. Sur AB comme diamètre on décrit un cercle. Lieu des points de concours des tangentes communes à la parabole et au cercle.

43. — Lieu des points tels que les tangentes issues de ces points à deux coniques données forment un faisceau harmonique. — Problème corrélatif.

44. — Lieu du sommet d'une parabole de grandeur constante tangente à une droite et dont le foyer décrit une autre droite.

CONCOURS DE 1890 (*Suite*).

ECOLE CENTRALE

Première session.

Géométrie analytique.

Voir le numéro de décembre, page 33.

Durée de l'épreuve : 4 heures.

Calcul trigonométrique.

1° Calculer les angles d'un triangle dans lequel $\frac{a}{1} = \frac{b}{1,50} = \frac{c}{1,75}$.

Résultats : $A = 34^\circ\,46'\,19'',01$, $B = 58^\circ\,48'\,40'',95$, $C = 86^\circ\,25'\,0'',62$.

2° Calculer la surface et le rayon du cercle inscrit d'un triangle semblable au précédent et dans lequel $a = 25675^{m},24$.

Résultats : $S = 493.447.000^{mq}$, $r = 9044^{m},135$.

(Durée : 1 h. 1/2)

Physique et Chimie.

60. — Une bouteille en fer munie d'un robinet contient un gaz liquéfié; on en laisse échapper par ébullition un poids p. On demande :

1° De calculer le volume V occupé par le gaz sorti sous la pression H et à la température t°, d_g étant sa densité à 0° et à 760;

2° D'exprimer le poids ω de gaz formé tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bouteille; on désignera par d_l et d les poids spécifiques du gaz et du liquide dans les conditions où ils se trouvent dans le récipient;

3° Quelle sera la température finale x de l'appareil, son équivalent en eau étant P, sa température initiale t, si l'on suppose qu'il n'emprunte pas de chaleur au milieu ambiant et si l'on représente par l la chaleur latente de vaporisation dans les conditions de l'expérience.

$p = 65^{gr}$, $P = 125^{gr}$, $H = 754^{mm}$, $t = 15^\circ$, $l = 90^{cal}$, $d_l = 1,43$, $d_g = 2,234$, $d_r = 0,0044$.

a, poids du litre d'air à 0 et 760 $= 1^{gr},293$.

II. — Donner, sous forme de tableau, les formules chimiques qui expriment les propriétés comparatives du gaz des marais et du gaz oléfiant.

Chaque formule devra être écrite : 1° en notation en équivalents ; 2° en notation atomique.

III. — Un gaz, composé oxygéné de l'azote, possède une densité égale à 1,039.

On fait passer deux litres de ce gaz sur du sulfure de baryum chauffé au rouge.

On recueille un litre de gaz azote pur, dont la densité est égale à 0,972. *Établir*, d'après cela : 1° la composition en volume du gaz donné; 2° la formule de ce gaz, sachant que la densité de l'oxygène est 1,1056.

(Durée : 3 heures.)

Géométrie descriptive.

Voir le numéro d'octobre, page 6.

(Durée : 4 heures.)

Deuxième session.

Géométrie analytique.

61. — On donne une parabole rapportée à deux axes rectangulaires Ox et Oy; cette parabole a son axe parallèle à l'axe des y, elle passe par l'origine et le point de l'axe des x dont l'abscisse est l, enfin elle admet une ordonnée maxima égale à f.

On donne, en outre, une droite passant par l'origine et un point A ($x = l$, $y = h$).

1° Démontrer que, si, pour une abscisse déterminée, on porte en ordonnée la somme algébrique de l'ordonnée de la droite et de celle de la parabole correspondantes à cette abscisse, l'extrémité de cette ordonnée est sur une parabole (P) égale à la première.

2° Démontrer que les axes des coniques qui passent par l'intersection d'un cercle et d'une conique sont parallèles aux axes de celle-ci.

3° Une circonférence de cercle décrite sur OA comme diamètre coupant la parabole (P) en quatre points O, A, B, C, chercher le lieu du point d'intersection des sécantes communes OA, BC quand on fait varier h, et construire ce lieu qui n'est pas du deuxième degré.

4° Chercher la valeur du rapport $\frac{l}{f}$ pour laquelle le cercle décrit sur OA comme diamètre est tangent à la parabole, quel que soit h.

Calcul trigonométrique.

On donne $a = 3456{,}742$, $b = 5264{,}823$, $C = 118^\circ\ 37'\ 43'',4$.

Calculer les angles A, B, le côté c, et le rayon du cercle inscrit.

Résultats : $A = 23^\circ\ 40'\ 19'',99$, $B = 37^\circ\ 41'\ 56'',61$, $c = 7556{,}915$, $r = 981{,}305$

Épure.

INTERSECTION DE DEUX CÔNES DE RÉVOLUTION

62. — Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m{,}255$ du petit côté supérieur.

La ligne de rappel oo' du centre du cercle de base du premier cône est à égale distance des grands côtés du cadre. La cote du point (o, o') est 100^{mm} et son éloignement 93^{mm}. La ligne de rappel ss' du sommet du premier cône est à 87^{mm} de oo' vers la droite. La cote du point (s, s') est 210^{mm} et son éloignement 162^{mm}. Le rayon du cercle de base est de 80^{mm}.

On prend le diamètre horizontal de ce cercle de base et on fait tourner de 90° le premier cône autour de cette horizontale, de manière que la cote du sommet reste supérieure à celle du centre de la base: on a ainsi le second cône.

On demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble des deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base. On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour placer les données et pour déterminer :

1° Un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points ;

2° Un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point;

3° Les génératrices de contour apparent des deux cônes et les points des bases et de l'intersection situés sur ces génératrices. On n'indiquera pas d'autre construction.

Titre extérieur : INTERSECTION DE SURFACES.

Titre intérieur : ASSEMBLAGE DE DEUX CÔNES.

Ces titres, en lettres dessinées, sont de rigueur.

Physique et chimie.

I. — Un récipient de volume invariable renferme, à la température de 0°, 10 kilogr. de gaz comprimé.

On fait sortir du récipient 3 kilogr. du gaz qu'il contient et on chauffe pour rétablir dans l'appareil la même pression qu'au début. A quelle température faut-il chauffer?

On donne $\alpha = 0{,}00367$.

II. — De l'influence électrique. — Électroscope.

III. — Comment liquéfie-t-on dans un tube de Faraday le gaz ammoniac, l'acide sulfhydrique et le chlore? Et comment prépare-t-on les substances destinées à ces liquéfactions?

IV. — Déterminer la composition de l'oxyde de carbone à l'aide de l'eudiomètre à mercure.

BOURSES DE LICENCE

Licence ès sciences mathématiques.

63. — En désignant par m un nombre entier positif, on considère deux polynomes $\varphi(x)$, $\psi(x)$ entiers en x, de degré inférieur à m, et tels que l'on ait identiquement

$$(1-x)^m\varphi(x) + x^m\psi(x) = 1.$$

1° Démontrer que l'on a identiquement

$$\psi(x) = \varphi(1-x), \qquad \varphi(x) = \psi(1-x), \qquad (1-x)\varphi'(x) - m\varphi(x) = \alpha x^{m-1};$$

dans cette dernière égalité, α désigne une constante et $\varphi'(x)$ la dérivée de $\varphi(x)$: en déduire, à l'aide du théorème de Rolle, que le polynome $\varphi(x)$ ne peut pas avoir deux racines négatives.

2° Déterminer en fonction de m la constante α et les coefficients du polynome $\varphi(x)$; démontrer que ce polynome a au plus une racine réelle.

64. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on considère un losange PQP'Q' ayant les deux sommets P, P' sur l'axe des x et les deux sommets Q, Q' sur l'axe des y. On supposera $OP = p$, $OQ = q$.

1° Par un point M, de coordonnées x, y, passent deux coniques inscrites dans le losange; former l'équation du second degré en m, qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes en M à ces deux coniques.

2° Trouver le lieu des points M où se coupent sous un angle donné deux coniques inscrites dans le losange.

3° Déduire de l'équation aux coefficients angulaires que ce dernier lieu doit se composer d'hyperboles.

QUESTION PROPOSÉE

65. — Trouver l'aire contenue dans la portion fermée de la courbe $x^4 + y^4 - a^2xy = 0$ qui se trouve dans l'angle des coordonnées positives.

(A. Hugron, lycée de Nantes.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. CHAIX. — 22000 1-91.

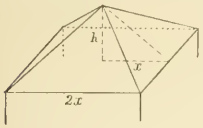
1re Année. N° 6. Mars 1891.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

12. — *Sur chacune des faces d'un cube d'arête variable* 2x, *on construit une pyramide régulière, de telle façon que les six pyramides soient toutes extérieures ou toutes intérieures au cube et aient même hauteur. On donne l'aire totale* $24a^2$ *du polyèdre ainsi obtenu. Étudier la variation de son volume.*

Désignons par h la hauteur de l'une des pyramides; la hauteur de l'un des triangles isocèles qui forment les faces sera évidemment égale à $\sqrt{h^2+x^2}$; il résulte de l'énoncé que la surface totale du solide est formée de 24 triangles identiques, de sorte que l'aire de chacun d'eux vaut a^2. D'autre part cette aire a aussi pour mesure $x\sqrt{h^2+x^2}$; il en résulte



$$x\sqrt{h^2+x^2}=a^2, \qquad \text{d'où} \qquad h^2=\frac{a^4-x^4}{x^2},$$

et

$$h=\frac{1}{x}\sqrt{a^4-x^4}.$$

Le volume du solide, quand les pyramides sont extérieures, a pour mesure

$$8x^3+8x^2h \qquad \text{ou bien} \qquad 8x^3+8x\sqrt{a^4-x^4}.$$

Si les pyramides sont intérieures, l'expression du volume est

$$8x^3-8x\sqrt{a^4-x^4}.$$

Il faut toutefois remarquer que le solide dont cette expression mesure le volume n'existe réellement que si h n'atteint pas x, ce qui arrive quand x surpasse $\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$. Si l'on a $x=\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$, la hauteur h est égale à x, les six pyramides ont leur sommet commun au centre du cube et le remplissent exactement; le volume est donc nul. Si l'on a $x<\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$, les pyramides empiètent l'une sur l'autre et l'expression algébrique précédente devient négative; sa valeur absolue représente *l'excès de la somme des volumes des pyramides sur le volume du cube.* Dans ce qui suit nous étudions les variations des expressions algébriques écrites plus haut sans nous préoccuper de l'existence du solide.

I. — Étudions d'abord les variations de la fonction

$$y=x^3+x\sqrt{a^4-x^4}$$

qui représente le huitième du volume du solide formé quand les pyramides sont extérieures.

Cette fonction est réelle pourvu que x soit compris entre $-a$ et $+a$; elle est finie et continue pour toutes ces valeurs de la variable. Nous ne ferons varier x que de zéro à a; car ce sont les seules valeurs qui correspondent au problème proposé; d'ailleurs quand x varie de zéro à $-a$, la fonction y reprend dans le même ordre les mêmes valeurs changées de signe.

Pour $x=0$, la fonction est nulle; pour $x=a$ elle vaut a^3. Calculons la dérivée de cette fonction :

$$y'=3x^2+\sqrt{a^4-x^4}-\frac{2x^4}{\sqrt{a^4-x^4}}=\frac{3x^2\sqrt{a^4-x^4}+a^4-3x^4}{\sqrt{a^4-x^4}}.$$

Cette dérivée est réelle aux mêmes conditions que la fonction ; elle est finie et continue sauf pour $x=a$, valeur pour laquelle elle est infinie. Quand x part de zéro et croît, la dérivée part de la valeur a^2, et elle est d'abord positive; il est visible que quand x est un peu inférieure à a, le numérateur est négatif; ainsi la dérivée s'est annulée au moins une fois dans l'intervalle. Cherchons les valeurs de x

pour lesquelles elle est nulle, et pour cela résolvons l'équation

$$3x^2\sqrt{a^4 - x^4} = 3x^4 - a^4. \qquad (1)$$

Nous sommes obligés d'élever les deux membres au carré et d'introduire ainsi les racines de l'équation

$$3x^2\sqrt{a^4 - x^4} = a^4 - 3x^4. \qquad (2)$$

Nous obtenons l'équation

$$18x^8 - 15a^4x^4 + a^8 = 0, \qquad (3)$$

que nous regardons comme du second degré en x^4; les racines sont

$$x^4 = a^4\frac{15 \pm \sqrt{153}}{36} \qquad \text{ou bien} \qquad x = a\sqrt[4]{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{12}}.$$

Ces racines sont toutes deux réelles, positives et inférieures à a. Mais nous ne pouvons accepter pour x^4 qu'une valeur supérieure à $\frac{1}{3}a^4$: car une valeur inférieure rend négatif le second membre de l'équation (1) et, par suite, ne peut satisfaire à cette équation. Or, la somme $\frac{5}{6}a^4$ des deux valeurs de x^4 surpasse $\frac{2}{3}a^4$; donc l'une au moins des racines surpasse $\frac{1}{3}a^4$: le produit $\frac{a^8}{18}$ est inférieur à $\left(\frac{a^4}{3}\right)^2$: donc l'une au moins de ces valeurs est inférieure à $\frac{a^4}{3}$. Ainsi, à l'inspection de l'équation, nous constatons que la plus grande racine seule appartient à l'équation (1) et la plus petite à l'équation (2). On vérifie d'ailleurs aisément qu'en substituant $\frac{a^4}{3}$ à x^4 dans le trinome on obtient un résultat *négatif*, ce qui montre que $\frac{a^4}{3}$ est compris entre les racines.

x	y'	y
0	a^2	0
	+	croît
α	0	Maxim.
	—	décroît
a	∞	a^3

Posons

$$\alpha = a\sqrt[4]{\frac{5 + \sqrt{17}}{12}}.$$

Cette valeur est la seule pour laquelle la dérivée s'annule, x variant de zéro à a. Dans l'intervalle de zéro à α, la dérivée est positive, et la fonction croît; x variant de α à a la dérivée est négative et la fonction décroît: Elle passe donc par un maximun pour $x = \alpha$. Ces variations sont inscrites dans le tableau ci-contre.

II. — Occupons-nous maintenant de la fonction

$$y = a^3 - x\sqrt{a^4 - x^4}.$$

Cette fonction est réelle dans les mêmes conditions que la précédente, et, pour les valeurs extrêmes de x, zéro et a, elle prend aussi les valeurs zéro et a^3. Sa dérivée est

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{a^4 - x^4} + 3x^4 - a^4}{\sqrt{a^4 - x^4}}.$$

Pour $x = 0$, elle a pour valeur $-a^2$, et prend d'abord des valeurs négatives; pour x un peu inférieure à a, elle est visiblement positive; elle s'est donc annulée au moins une fois puisque c'est une fonction continue pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et a. Si on égale son numérateur à zéro, on trouve l'équation (2) écrite plus haut. Il en resulte que la seule valeur de x pour laquelle cette dérivée s'annule est

$$a\sqrt[4]{\frac{5 - \sqrt{17}}{12}}.$$

x	y'	y
0	$-a^2$	0
	—	décroît
β	0	minim.
	+	croît
a	∞	a^3

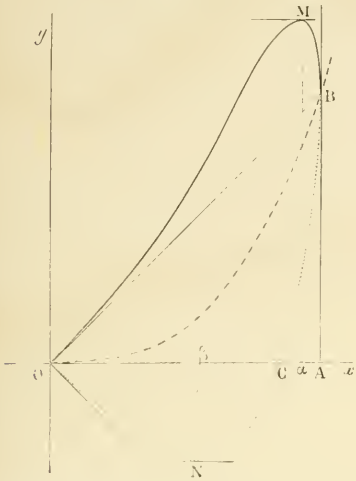
Cette valeur correspond à un minimum de la fonction, puisque la dérivée, d'abord négative, devient positive après s'être annulée. En appelant β cette valeur de x, les variations de la fonction sont indiquées dans le tableau ci-contre.

CHÉDEVILLE, élève au lycée Saint-Louis (cours de marine).

Nous pouvons représenter par une courbe les variations de ces fonctions; mais il convient de remarquer que y désignait jusqu'ici un volume; nous avons donc construit la courbe ayant pour équation

$$a^2y = x^3 \pm x\sqrt{a^4 - x^4},$$

de sorte que le volume correspondant à une abscisse donnée sera représenté par a^2y.



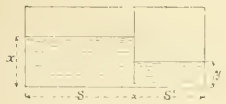
La première fonction correspond à l'arc en trait plein, la seconde à l'arc en pointillé. Dans le cas des pyramides intérieures, la variation de volume du solide, quand il existe, est figurée par l'arc CB. L'arc OC correspond au cas où les pyramides empiètent l'une sur l'autre.

La courbe est symétrique par rapport à l'origine; les tangentes à l'origine sont les bissectrices des angles des axes, et ces tangentes sont des tangentes d'inflexion. La courbe présente encore deux points d'inflexion, l'un sur l'arc OM et l'autre symétrique par rapport à l'origine. On vérifie aisément que l'abscisse α est plus grande que OC et β plus grande que $\frac{a}{2}$; a est représenté sur la figure par OA. Enfin pour faire la construction on s'est aidé de la courbe diamétrale représentée par l'équation $a^2y = x^3$. On n'a tracé que la partie qui correspond aux abscisses positives.

---

25. — *Deux bassins à parois verticales, dont les sections horizontales* S *et* S′ *sont connues, sont mis en communication par un orifice dont le débit pendant l'élément de temps* dt *est proportionnel au produit de* dt *par la racine carrée de la différence des hauteurs de l'eau dans les deux bassins. Au moment où la communication est établie, le bassin* S′ *est vide et la hauteur de l'eau dans le bassin* S *est* h. *On demande comment varieront en fonction du temps les hauteurs* x *et* y *du liquide dans les deux bassins et à quelle époque l'équilibre sera établi.*

(École des Ponts et Chaussées, concours de 1890.)



On a d'abord $$Sx + S'y = Sh. \qquad (1)$$

Soit dy l'accroissement de y pendant le temps dt. On aura

$$S'dy = kdt\sqrt{x - y}, \qquad (2)$$

k étant une constante, déterminée par l'expérience. Remplaçant dans (2), x par sa valeur tirée de (1), et posant $\frac{S + S'}{S} = \mu$, il vient

$$\frac{dy}{\sqrt{h - \mu y}} = \frac{k}{S'}\,dt.$$

Intégrant, on a $$C - \frac{2}{\mu}\sqrt{h - \mu y} = \frac{k}{S'}t;$$

C est une constante que nous déterminons en observant que pour $t = 0$, on a $y = 0$. On obtient $C = \frac{2}{\mu}\sqrt{h}$; par suite

$$\frac{2}{\mu}\left[\sqrt{h} - \sqrt{h - \mu y}\right] = \frac{k}{S'}t; \qquad (3)$$

d'où
$$y = \frac{kSt}{4S'}\left[\frac{4\sqrt{h}}{S} - \frac{kt}{S'}\right],$$
ou
$$y = \frac{kt(S+S')}{4SS'}\left[\frac{4S\sqrt{h}}{S+S'} - \frac{kt}{S'}\right];$$
et par suite
$$x = h - \frac{kt(S+S')}{4S^2}\left[\frac{4S\sqrt{h}}{S+S'} - \frac{kt}{S'}\right].$$

On voit ainsi que x et y sont des fonctions entières du deuxième degré par rapport à t; par suite, x décroît, y croît, et les deux mouvements sont uniformément variés.

L'équilibre a lieu quand $x = y = \frac{Sh}{S+S'}$; on obtient la valeur de t correspondante en remplaçant y par cette valeur dans l'équation (3); on trouve ainsi
$$t = \frac{2SS'\sqrt{h}}{k(S+S')}.$$

C. H

(Solutions semblables par MM. : E. Baudran, lycée de Rouen; L. Randon, Louis-le-Grand; E. Ronzel, lycée de Clermont.)

---

36. — *Étant donnée une série positive convergente*
$$u_1, u_2, \ldots u_n \ldots\ldots$$
on peut toujours trouver des entiers positifs croissant indéfiniment
$$p_1, p_2, \ldots p_n$$
tels qu'en posant
$$v_n = u_{p_{n-1}+1} + u_{p_{n-1}+2} + \ldots + u_{p_n}$$
on ait
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < k,$$
k étant un nombre positif arbitraire, que l'on peut supposer inférieur à l'unité.

En effet, soient k un nombre positif arbitraire et m un entier positif donné; je dis que l'on peut toujours déterminer un nombre q entier et au moins égal à 1, tel que l'on ait
$$u_{m+q} + u_{m+q+1} + \ldots + u_{m+q+r} < k(u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+q-1}) \qquad (1)$$
quelque grand que soit l'entier positif r.

Effectivement, la série proposée étant convergente, on peut supposer n assez grand pour que le reste R_n, en posant
$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$$
soit moindre qu'un nombre arbitraire donné d'avance ku_m, de sorte que l'inégalité
$$R_n < ku_m \qquad (2)$$
soit vérifiée.

Trois cas peuvent se présenter : soit d'abord $n > m$. Si l'on pose $n = m + q - 1$, l'entier q sera plus grand que 1, et comme on suppose
$$u_{m+q} + u_{m+q+1} + \ldots < ku_m,$$
on a, *a fortiori*,
$$u_{m+q} + u_{m+q+1} + \ldots < k(u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+q-1}).$$

En second lieu, si $n = m$, on a
$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots < ku_m;$$
et si n est plus petit que m, soit $n = m - h - 1$:
$$u_{m-h} + u_{m-h+1} + \ldots + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots < ku_m.$$

Dans ces deux derniers cas, l'inégalité (1) sera évidemment vérifiée en posant $q = 1$.

Cela posé, désignons par q_1 la valeur de q qui correspond à $m = 1$, de sorte que

$$u_{1+q_1} + u_{2+q_1} + \ldots < k(u_1 + u_2 + \ldots + u_{q_1}).$$

Si $m = 1 + q_1$, on aura pareillement $q = q_2$ et

$$u_{q_1+q_2+1} + u_{q_1+q_2+2} + \ldots < k(v_{q_1+1} + u_{q_1+2} + \ldots u_{q_1+q_2}).$$

De même :

$$u_{q_1+q_2+q_3+1} + u_{q_1+q_2+q_3+2} + \ldots < k(u_{q_1+q_2+1} + u_{q_1+q_2+2} + \ldots + u_{q_1+q_2+q_3}),$$

et ainsi de suite. En posant $p_1 = q_1$, $p_2 = q_1 + q_2$, $p_3 = q_1 + q_2 + q_3 \ldots$, de sorte que $p_n = p_{n-1} + q_n$, on voit que les nombres $p_1, p_2, \ldots p_n$ vont en croissant, et que l'on a

$$u_{p_n+1} + u_{p_n+2} + \ldots < k(u_{p_{n-1}+1} + u_{p_{n-1}+2} + \ldots + u_{p_n}),$$

et *a fortiori*,

$$u_{p_n+1} + u_{p_n+2} + \ldots + u_{p_{n+1}} < k(u_{p_{n-1}+1} + u_{p_{n-1}+2} + \ldots + u_{p_n}),$$

c'est-à-dire

$$v_{n+1} < kv_n$$

ou

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < k.$$

---

38. — *En désignant par* λ_n *la partie entière de* $\log_{10} n$, *étudier la série dont le terme général* $u_n = a^{n-\lambda_n} . b^{\frac{1}{2}\lambda_n(\lambda_n+1)}$ *en supposant* $0 < a < 1 < b$. *Montrer que la série est convergente, et qu'il y a une infinité de valeurs de* n *pour lesquelles* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *peut dépasser un nombre donné d'avance, quelque grand qu'il soit.*

Supposons $10^p < n < 10^{p+1} - 1$; dans ce cas $\lambda_n = p$ et $\lambda_{n+1} = p$, de sorte que

$$u_n = a^{n-p} . b^{\frac{1}{2}p(p+1)}$$

$$u_{n+1} = a^{n+1-p} . b^{\frac{1}{2}p(p+1)}$$

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Mais si l'on suppose $n = 10^{p+1} - 1$, on a $\lambda_n = p$ et $\lambda_{n+1} = p + 1$, de sorte que dans ce cas

$$u_n = a^{n-p} . b^{\frac{1}{2}p(p+1)}, \qquad u_{n+1} = a^{n-p} . b^{\frac{1}{2}(p+1)(p+2)},$$

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = b^{p+1}.$$

Si p augmente indéfiniment, b^{p+1} augmente aussi indéfiniment, puisque l'on a supposé $b > 1$. Il y a donc une infinité de valeurs de n pour lesquelles $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ grandit indéfiniment avec n. Néanmoins, la série proposée est convergente.

En effet,

$$\sqrt[n]{u_n} = a^{1-\frac{\lambda_n}{n}} . b^{\frac{\lambda_n(\lambda_n+1)}{2n}}.$$

Or, on sait que, α étant positif, $\frac{(\log_{10} n)^\alpha}{n}$ tend vers zéro quand n grandit indéfiniment; il en est de même à plus forte raison de $\frac{(\lambda_n)^\alpha}{n}$; donc $\frac{\lambda_n}{n}$ et $\frac{\lambda_n^2}{n}$ tendant vers zéro, $\frac{\lambda_n(\lambda_n+1)}{2n} = \frac{(\lambda_n)^2}{2n} + \frac{\lambda_n}{2n}$

tend aussi vers zéro, et il en résulte que

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = a < 1,$$

ce qui démontre la convergence de la série.

Cela posé, appliquons la règle de M. C. Bourlet (voir *R. M. S.*, n° 5); pour cela, posons

$$\sqrt[n]{u_n} = a + \alpha_n,$$

d'où

$$n\alpha_n = na\left[a^{-\frac{\lambda_n}{n}} . b^{\frac{\lambda_n(\lambda_n+1)}{2n}} - 1\right].$$

Le produit $n\left[a^{-\frac{\lambda_n}{n}} . b^{\frac{\lambda_n(\lambda_n+1)}{2n}} - 1\right]$ augmente indéfiniment avec n. En effet, supposons

$$10^p \leq n < 10^{p+1};$$

il suffit de prouver que $\dfrac{a^{-\frac{p}{10^{p+1}}} . b^{\frac{p(p+1)}{10^{p+1}}} - 1}{\left(\frac{1}{10^p}\right)}$ augmente indéfiniment avec p. Or, en prenant le rapport des dérivées par rapport à p et simplifiant, on doit chercher la limite de

$$\frac{a^{-\frac{p}{10^{p+1}}} . b^{\frac{p(p+1)}{10^{p+1}}}[La(-1+pL10) + Lb(2p+1) - p(p+1)L10]}{-10L10}.$$

Le facteur $a^{-\frac{p}{10^{p+1}}} . b^{\frac{p(p+1)}{10^{p+1}}}$ tend vers l'unité, et l'expression entre crochets, qui est un trinome du second degré en p, croît indéfiniment; donc le produit $n\alpha_n$ augmente indéfiniment; on voit d'après cela que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne devait pas avoir la même limite que $\sqrt[n]{u_n}$.

J. Vigneaux (lycée de Toulouse.)

39. — *Étudier la série dont le terme général est*

$$u_n = a^{n-p} . b^{p^2} \qquad (0 < a < 1 < b)$$

p *étant le nombre de chiffres de* n.

Soit $n = 10^p - 1$; n a p chiffres, $n+1$ en a $p+1$; donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = b^{2p+1}$, ce qui prouve que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ peut augmenter indéfiniment avec n.

La série est convergente; en effet, $\sqrt[n]{u_n} = a . \dfrac{b^{\frac{p^2}{n}}}{a^{\frac{p}{n}}}$.

Supposons

$$10^{p-1} \leq n < 10^p;$$

ce qui donne

$$\frac{p}{10^p} < \frac{p}{n} \leq \frac{p}{10^{p-1}},$$

d'où il résulte que $\dfrac{p}{n}$ tend vers zéro, quand n augmente indéfiniment; on a aussi

$$\frac{p^2}{10^p} < \frac{p^2}{n} \leq \frac{p^2}{10^{p-1}};$$

donc $\dfrac{p^2}{n}$ tend également vers zéro. Par suite $\sqrt[n]{u_n}$ a pour limite a, et comme a est supposé plus petit que l'unité, la série est convergente.

J. Vigneaux (Toulouse).

Autres solutions par MM. L. Perrée (Condorcet), Auzeram (Toulouse).

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

22. — *Étant donné un cercle fixe C dont le centre est en un point de l'axe des* y, *et une série de circonférences tangentes à l'axe des* x *à l'origine, on mène des tangentes communes à ces circonférences et au cercle fixe, et on demande le lieu des points de contact* M.

On examinera en particulier le cas où le cercle fixe se réduit à un point et celui où le centre de ce cercle coïncide avec l'origine.

(École des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1890.)

Désignons par R le rayon du cercle fixe, et par a l'ordonnée de son centre C. L'équation de ce cercle est

$$x^2 + (y - a)^2 - R^2 = 0. \qquad (1)$$

Observons que l'on peut supposer le point C sur le demi-axe Oy et par suite regarder l'ordonnée a comme positive.

D'ailleurs, si l'on représente par λ un paramètre variable pouvant prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, l'équation du cercle variable est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0. \qquad (2)$$

Soit maintenant un point M du lieu cherché, de coordonnées x et y. La tangente en ce point au cercle variable correspondant a pour équation

$$Xx + Y(y - \lambda - \lambda y = 0.$$

Cette droite devant être tangente au cercle (1), sa distance au point C $(0, a)$ doit être égale à R. Cela donne

$$\frac{[a(y - \lambda) - \lambda y]^2}{x^2 + (y - \lambda)^2} = R^2. \qquad (3)$$

Ainsi les coordonnées x et y d'un point quelconque du lieu satisfont aux équations (2) et (3). Comme on déduit de ces équations l'équation

$$[a(y - \lambda) - \lambda y]^2 = R^2\lambda^2,$$

qui s'écrit

$$ay - \lambda(a + y \pm R) = 0, \qquad (4)$$

l'équation du lieu s'obtiendra en éliminant λ entre les équations (2) et (4). On trouve ainsi l'équation

$$2ay^2 - (x^2 + y^2)(a + y \pm R) = 0,$$

qui se décompose en

$$(a + y + R)x^2 - (a - y - R)y^2 = 0, \qquad (5)$$

et

$$(a + y - R)x^2 - (a - y + R)y^2 = 0. \qquad (6)$$

Le lieu se compose donc de deux courbes du troisième degré qui admettent l'axe des y pour axe de symétrie et ont l'origine pour point double, de sorte que l'origine est en définitive un point quadruple.

Les deux couples de tangentes à l'origine ont respectivement pour équations

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{a + R}{a - R} \qquad \text{et} \qquad \frac{y^2}{x^2} = \frac{a - R}{a + R};$$

les deux tangentes d'un couple sont perpendiculaires aux tangentes de l'autre.

Nous distinguerons plusieurs cas selon que les tangentes de chacun de ces couples qui sont en même temps réelles ou imaginaires, seront réelles et distinctes, réelles et confondues, ou imaginaires; c'est-à-dire selon que l'on aura

$$R < a, \qquad R = a, \qquad R > a,$$

et nous y joindrons les deux cas particuliers

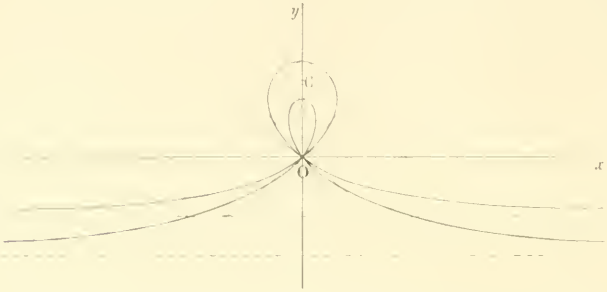
$$R = 0 \qquad \text{et} \qquad a = 0$$

que l'on nous demande d'examiner.

1° $R < a$. — Les quatre tangentes à l'origine sont réelles. La courbe représentée par l'équation (5) est comprise entre les deux droites

$$y = -(a + R) \qquad \text{et} \qquad y = a - R.$$

La première de ces droites est une asymptote et la seconde une tangente qui touche la courbe en un point de l'axe Oy.



La courbe représentée par l'équation (6) admet pour asymptote la droite $y = R - a$ et pour tangente en un point de l'axe Oy, $y = a + R$; elle est comprise entre ces deux droites.

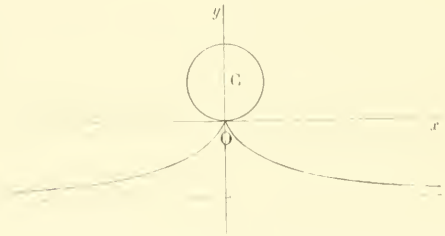
2° $R = a$. — Les équations (5) et (6) deviennent

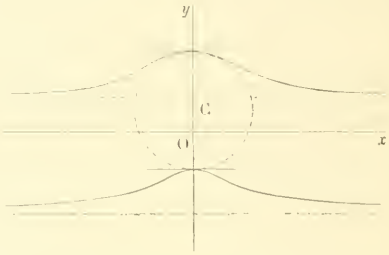
$$2ax^2 + y(x^2 + y^2) = 0 \quad (7)$$

$$\text{et} \quad y(x^2 + y^2 - 2ay) = 0. \quad (8)$$

L'équation (7) représente une cissoïde droite ayant pour asymptote la droite $2a + y = 0$.

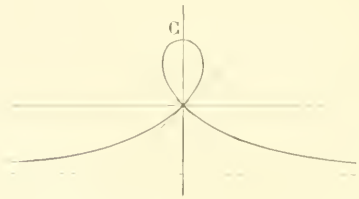
L'équation (8) représente l'axe des x, qui correspond au cas où le centre du cercle variable s'éloigne à l'infini, et le cercle C qui correspond au cas où le cercle variable coïncide avec lui.





3° $R > a$. — Les tangentes à l'origine sont imaginaires; l'origine est un point quadruple isolé.

On trouve pour asymptotes et pour tangentes en des points de l'axe des y, les mêmes droites que dans le cas précédent; mais les régions où se trouvent les deux courbes n'empiètent plus l'une sur l'autre.



4° $R = 0$. — Les équations (5) et (6) se confondent et donnent l'équation

$$y(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0,$$

qui représente une strophoïde droite. Cette strophoïde a son point double à l'origine. Elle passe par le point C et admet la droite $a + y = 0$ pour asymptote.

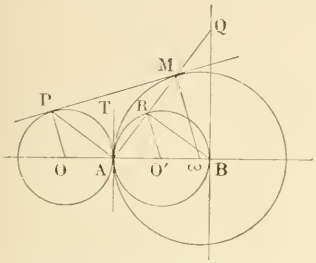
5° $a = 0$. — Les équations (5) et (6) deviennent

$$(y + R)(x^2 + y^2) = 0 \qquad \text{et} \qquad (y - R)(x^2 + y^2) = 0.$$

Elles représentent deux droites parallèles à l'axe des x et tangentes au cercle C. L'origine est en outre un point du lieu quadruple isolé.

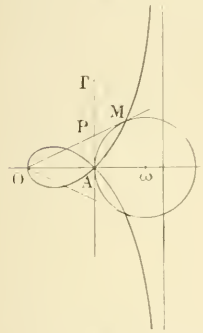
SOLUTIONS GÉOMÉTRIQUES DU SECOND, DU QUATRIÈME ET DU CINQUIÈME CAS

1° $R = a$. — Le problème revient au suivant : Étant donné un cercle fixe O, on considère un cercle variable ω, tangent au cercle O en un point fixe A; trouver le lieu des points de contact des tangentes communes.



Soit la tangente PM. Menons ωM, OP; construisons la circonférence O′ égale à la circonférence O et tangente à celle-ci en A, et menons à cette circonférence la tangente BQ au point B diamétralement opposé au point A. Traçons enfin AM, qui rencontre cette tangente en Q et la circonférence O′ en R et menons O′R, RB, AP et la tangente AT.

Je dis que l'on a AR = MQ. En effet OP et ωM sont parallèles comme perpendiculaires à PM; on sait aussi que O′R et ωM sont parallèles, puisque A est le centre de similitude directe des cercles O′ et ω. Donc OP et O′R sont parallèles et par suite les triangles OPA et O′RB sont égaux; d'où PA = RB; de plus ces deux droites sont parallèles. D'ailleurs une propriété connue nous apprend que l'angle PAR est droit; il en résulte que BRQ est aussi droit. En outre $\widehat{MPA} = \widehat{PAT} = \widehat{RBQ}$. Les deux triangles PAM et QRB sont donc égaux; d'où AM = RQ et AR = MQ.



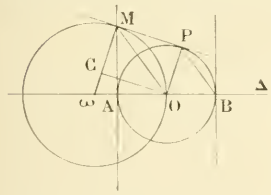
Ainsi, le lieu du point M est une cissoïde droite ayant OO′ pour axe de symétrie, A pour point de rebroussement et BQ pour asymptote.

2° R = 0. — Le problème revient à celui-ci : Trouver le lieu des points de contact des tangentes issues d'un point fixe O, à un cercle ω qui passe par un point fixe A et dont le centre ω parcourt la droite OA.

Si nous menons en A la tangente AT au cercle ω qui rencontre en P la tangente OM, nous avons PM = PA; ce qui montre que le lieu du point M est une strophoïde droite qui passe en O et a le point A pour point double. Il est d'ailleurs évident que OA est un axe de symétrie.

3° $a = 0$. — Le problème peut s'énoncer : Trouver le lieu des points de contact des tangentes communes à une circonférence fixe O et à une circonférence variable ω qui passe par O et dont le centre décrit une droite Δ passant par O.

Soient M et P les points de contact, A et B les points de rencontre de Δ et du cercle fixe. Menons MA et abaissons OC perpendiculaire sur ωM. Nous avons



$$OC = MP, \qquad CM = OP$$

et

$$\omega C = \omega M - CM = \omega M - OP = \omega O - OA = \omega A.$$

Les deux triangles ωMA et ωCO sont égaux; par suite

$$MA = CO = MP.$$

MA est donc tangente à la circonférence O, et le lieu du point M est la tangente en A à cette circonférence.

Si on avait supposé le point ω sur la portion de la droite Δ à droite de O, on aurait trouvé pour lieu la tangente en B à la circonférence O.

(L. P. Randon, lycée Louis-le-Grand.)

[Ont résolu la même question : MM. Auzeram, lycée de Toulouse : E. Baudran, A. Lecoquierre, lycée de Rouen : C. Hugon ; E. Jossinet, lycée de Troyes ; A. Pouillart, E. Ronzel, lycée de Clermont.]

29. — *D'un point* P *du plan d'une ellipse, on mène les quatre normales, et l'on considère le quadrilatère formé par les tangentes aux points d'incidence.*

1° Sur quelle courbe doit être situé le point P *pour que le quadrilatère soit circonscriptible à un cercle?*

2° Trouver le lieu du centre du cercle inscrit, et le lieu des sommets du quadrilatère, lorsque le point P *décrit la courbe précédemment trouvée.*

L'équation tangentielle de l'ellipse rapportée à ses axes est

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0. \tag{1}$$

Soient x, y les coordonnées du point P. On aura une relation entre les coordonnées u, v, w d'une tangente en un point d'incidence, en écrivant que la droite qui joint P au point de contact $\left(-\frac{a^2u}{w}, -\frac{b^2v}{w}\right)$ est perpendiculaire à cette tangente. On obtient ainsi

$$c^2uv - uwy + vwx = 0, \tag{2}$$

équation tangentielle d'une parabole, tangente aux quatre tangentes à l'ellipse aux points d'incidence. Observons que cette parabole reste la même quand l'ellipse se déforme en conservant les mêmes foyers.

Le quadrilatère dont il s'agit est le quadrilatère formé par les tangentes communes aux courbes (1) et (2); l'équation générale des coniques inscrites à ce quadrilatère sera donc

$$f(u, v, w) = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \lambda[c^2uv - uwy + vwx] = 0. \tag{3}$$

Exprimons que cette équation représente un cercle, et pour cela il faut écrire que les asymptotes sont parallèles aux droites isotropes. On sait que les coordonnées des asymptotes sont données par les équations (3) et (4)

$$f'_w(u, v, w) = 2w + \lambda[-uy + vx] = 0. \tag{4}$$

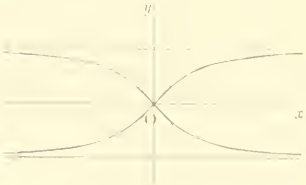
Éliminons w entre (3) et (4), et écrivons que le premier membre de l'équation obtenue est identique, à un facteur constant près, à $u^2 + v^2$. On a ainsi

$$c^2 = \frac{\lambda^2}{4}(x^2 - y^2), \qquad \lambda = \frac{2c^2}{xy}. \tag{5}$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on a le premier lieu demandé

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{c^2}, \tag{6}$$

courbe du quatrième degré que l'on construit aisément, en résolvant par rapport à y. Elle a un point double à l'origine, avec tangentes d'inflexion et deux asymptotes ($y = \pm c$) parallèles à Ox. Elle est d'ailleurs symétrique par rapport aux deux axes.



2° Les coordonnées du centre de la courbe (3) sont

$$x' = +\frac{\lambda y}{2}, \qquad y' = -\frac{\lambda x}{2};$$

et la première des équations (5) montre que ce point décrit l'hyperbole équilatère ayant pour équation

$$y^2 - x^2 = c^2.$$

Enfin, si α, β désignent les coordonnées d'un sommet Q du quadrilatère, on peut considérer le point P comme le pôle normal de la polaire du point Q, ce qui donne

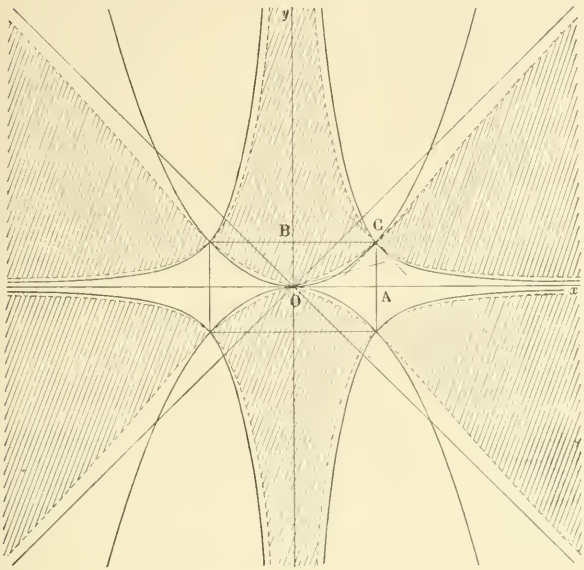
$$x = \frac{-c^2\alpha(\beta^2 - b^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \qquad y = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Remplaçons x et y par ces valeurs dans l'équation (6); on obtient le lieu du point Q :

$$c^2x^2y^2(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2-(b^2x^2+a^2y^2)^2[x^2(y^2-b^2)^2-y^2(x^2-a^2)^2]=0,$$

courbe du douzième degré. Nous allons donner une idée de sa forme. On peut construire les deux courbes du troisième degré

$$x^2(y^2-b^2)^2-y^2(x^2-a^2)^2=[x(y^2-b^2)+y(x^2-a^2)][x(y^2-b^2)-y(x^2-a^2)]=0,$$



qui ont pour asymptotes les deux axes et respectivement les deux bissectrices; elles passent toutes deux par l'origine et les sommets du rectangle construit sur les axes. On obtient ainsi des régions du plan (couvertes de hachures) dans lesquelles il ne peut y avoir aucun point de la courbe.

Comme l'équation de cette courbe peut s'écrire

$$A(x^2-a^2)^2+B(y^2-b^2)^2=0,$$

on voit que les quatre sommets du rectangle sont des points doubles, et on vérifie sans peine que les tangentes en ces points sont parallèles aux bissectrices des axes. En outre, l'origine est un point quadruple, mais nous n'avons que deux branches de courbe réelles tangentes à Ox. Enfin on peut déterminer les branches infinies; on reconnaît que Ox et Oy sont asymptotes, et qu'on a des branches paraboliques parallèles à Oy. A l'aide de ces données, on peut tracer la courbe.

DESCOMBES, maître répétiteur au lycée d'Annecy.

(Solutions analogues par MM. André Laronde, lycée Louis-le-Grand; Camille Rech, à Nancy.)

SECONDE SOLUTION. — Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse donnée. Exprimons que la tangente au point (x, y) est tangente à un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R, ce qui donne la condition

$$\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1\right)^2-R^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)=0. \qquad (2)$$

Cette équation représente une conique coupant l'ellipse en quatre points tels que les tangentes en ces points soient tangentes au cercle considéré. Les pieds des normales issues du point P (α, β) sont sur l'hyperbole d'Apollonius ayant pour équation

$$c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0. \qquad (3)$$

Pour écrire que cette hyperbole passe par l'intersection des coniques (1) et (2), il suffit de déterminer λ de manière que l'équation

$$\left(\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1\right)^2 - R^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0 \qquad (4)$$

soit identique à l'équation (3).

Le terme constant devant être nul, on a $\lambda = 1$.

Annulons les coefficients de x^2 et de y^2, ce qui donne

$$x_0^2 - R^2 + a^2 = 0, \qquad y_0^2 - R^2 + b^2 = 0.$$

Ces équations donnent $$y_0^2 - x_0^2 = a^2 - b^2 = c^2, \qquad (5)$$

de sorte que le lieu du centre C est une hyperbole équilatère.

Pour achever d'identifier les équations (3) et (4), écrivons que les coefficients des termes semblables sont proportionnels, ce qui donne immédiatement

$$y_0 = -\frac{c^2}{\beta}, \qquad x_0 = \frac{c^2}{\alpha} \qquad (6)$$

et par suite, à cause de l'équation (5), $$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{c^2}. \qquad (7)$$

Telle est l'équation du lieu du point P.

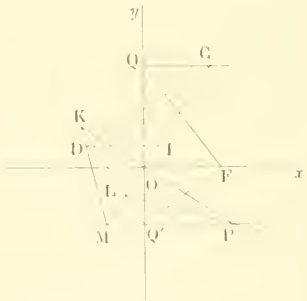
Les courbes obtenues (5) et (7) restent les mêmes pour toutes les coniques homofocales à l'ellipse donnée.

Remarques. — 1° Les équations (6) donnent

$$\beta y_0 + \alpha x_0 = 0,$$

ce qui démontre que les droites OC et OP sont perpendiculaires.

2° Le point C étant supposé connu, on en déduit le point P; pour cela, abaissons du point C la perpendiculaire CQ sur le petit axe de l'ellipse et joignons le point Q à l'un des foyers F; enfin menons FQ′ perpendiculaire à QF, jusqu'à sa rencontre avec le petit axe, en Q′; le point P sera à l'intersection de la perpendiculaire OP à OC, et de la parallèle à l'axe focal, menée par Q′; la même construction exécutée en ordre inverse permet de trouver le point C quand le point P est donné.



3° On peut déterminer géométriquement la tangente en P au lieu décrit par ce point. Pour cela rappelons le théorème de Frégier généralisé : *Si par un point* ω *pris sur une conique on fait passer deux droites* ωm, ωm′ *formant deux faisceaux en involution et rencontrant la conique en* m *et* m′, *la droite* mm′ *passe par un point fixe* r *et la tangente en* ω *à la conique correspond à la droite* ωr. La réciproque est vraie. Cela étant, supposons que deux courbes (C) et (C′) se correspondent point par point, de sorte que la corde mm' joignant deux points correspondants passe par un point fixe r et que les droites ωm, $\omega m'$ forment une involution; soient m_1 un point infiniment voisin de m sur (C) et m'_1 un point infiniment voisin de m' sur (C′); la conique passant par les cinq points m, m_1, m', m'_1, ω est déterminée; en passant à la limite on obtient une conique tangente en m à la droite mt, en m' à la droite $m't'$, mt étant la tangente en m à la courbe (C) et $m't'$ la tangente en m' à (C′), et de plus cette conique est tangente en ω à la droite ωs qui correspond à ωr dans l'involution déterminée par ωm, $\omega m'$.

Cela posé, les droites CQ, MQ′ forment une involution; elles passent par un point fixe rejeté à l'infini dans la direction de Ox, CM passe par un point fixe O, la droite ωr est confondue avec Ox et le rayon conjugué est rejeté à l'infini; la conique auxiliaire est une parabole ayant son axe parallèle à Ox. Le point C décrit une hyperbole équilatère; il est donc facile de construire la tangente en C, soit

CD. La tangente MD à la courbe décrite par M s'obtient très aisément en prenant I au milieu de CM et menant par I la parallèle à Ox qui coupe CD au point D; il suffit de tirer MD. Cela étant, l'angle MOP est droit, PM passe par un point fixe, à l'infini sur Ox; la conique auxiliaire est tangente en O à l'axe des y, en M à la droite MD, en P à la droite cherchée. Donc, en se rappelant que si une conique est circonscrite à un triangle OMP les tangentes aux sommets du triangle coupent les côtés opposés en trois points en ligne droite, on prendra le point de rencontre K de OP avec la tangente MD, le point de rencontre Q′ de MP avec la tangente Oy; KQ′ coupe OM au point L qui appartient à la tangente cherchée PL.

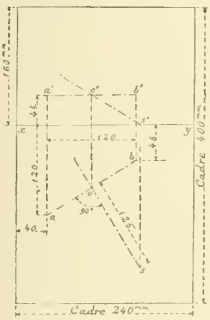
Il reste à trouver le lieu des sommets du quadrilatère. Il suffit pour cela de remplacer dans l'équation (7), α et β par leurs expressions connues en fonction des coordonnées (x, y) de l'un des sommets (formules de Desboves), ce qui donne

$$\frac{1}{y^2(x^2-a^2)^2}-\frac{1}{x^2(y^2-b^2)^2}=\frac{c^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^2}.$$

H. Pilleux (lycée Louis-le-Grand).

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

24. — *Un cylindre de révolution a pour axe la droite horizontale* ab, a′b′; *il est tangent au plan horizontal et il est limité par deux plans de section droite passant par les extrémités* a, a′ *et* b, b′ *de l'axe.*



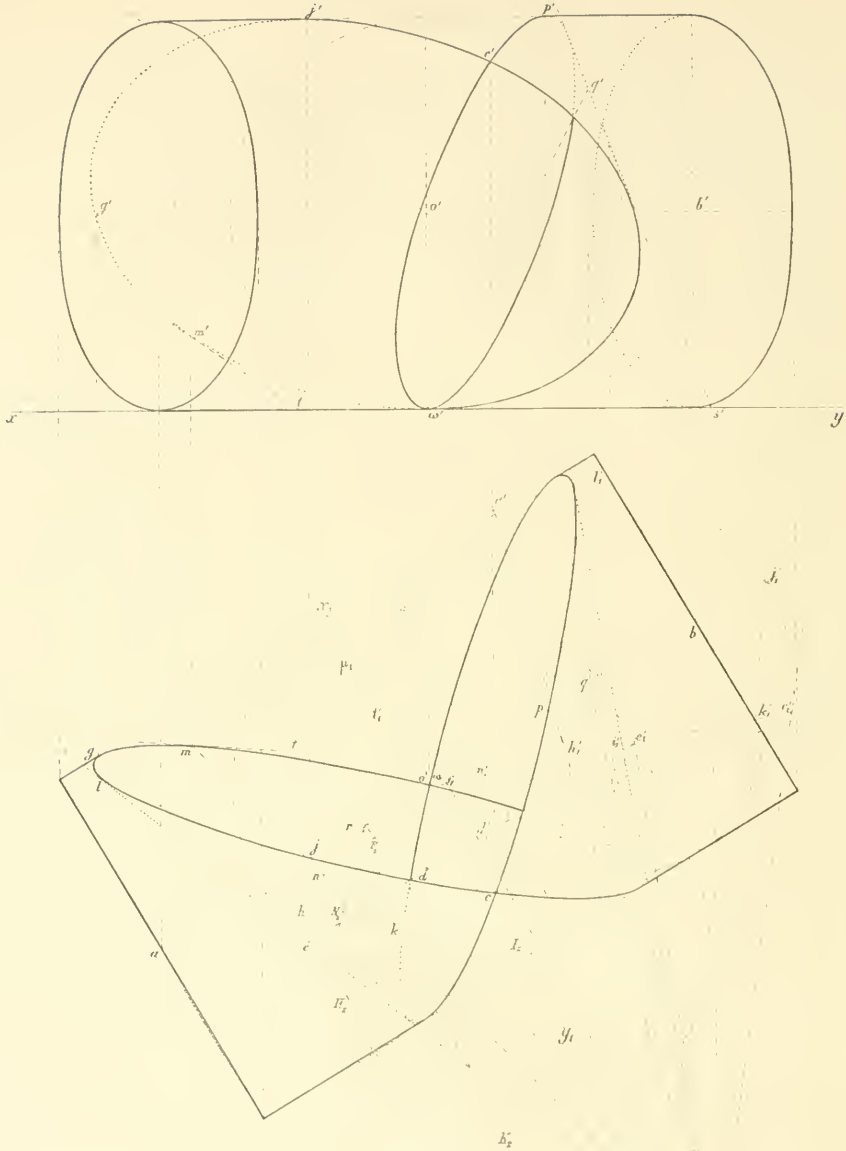
Un cône, également de révolution, a pour sommet le point s, s′ *situé sur le plan horizontal; son axe passe par le point* o, o′, *milieu de l'axe du cylindre et il est, lui aussi, tangent au plan horizontal. En projection horizontale, les axes des deux surfaces sont perpendiculaires l'un sur l'autre.*

On demande de chercher l'intersection des deux surfaces et de représenter le cylindre seul en supposant le cône enlevé après avoir fait son entaille dans le cylindre.

L'épure devra indiquer la marche suivie pour trouver un point courant de l'intersection et la tangente en ce point. Elle comportera également les constructions faites pour trouver les points les plus remarquables de l'intersection.

Le cône et le cylindre sont circonscrits à une même sphère qui a pour centre le point de rencontre o, o' des axes; donc leur intersection se compose de deux courbes planes. Ces courbes, sections planes du cylindre de révolution, sont des ellipses dont les projections horizontales et verticales seront des ellipses. De plus, le plan vertical passant par l'axe SO du cône étant un plan de symétrie, les deux ellipses projections horizontales de l'intersection seront symétriques l'une de l'autre par rapport à la trace horizontale so de ce plan.

Pour déterminer un point quelconque de l'intersection, faisons un changement de plan vertical et prenons pour nouveau plan vertical de projection le plan projetant horizontalement SO; la nouvelle ligne de terre x_1y_1 coïncidera avec so. Le plan de la courbe de contact du cône et de la sphère inscrite



Echelle : $\frac{4}{5}$

dans les deux surfaces données est alors $a\omega c'_1$; la base du cylindre sur le nouveau plan vertical est le cercle de centre o'_1 et qui passe par ω; la projection verticale de l'intersection des deux surfaces coïncide avec ce cercle. Prenons un point quelconque m'_1 de ce cercle; la projection horizontale de la génératrice du cylindre qui passe par ce point est $m\mu_1$. La projection verticale de la génératrice du cône qui passe par le point m, m'_1 de l'intersection est sm'_1; cherchons sa projection horizontale. Cette génératrice SM rencontre la courbe de contact du cône et de la sphère au point n, n'_1; on a n'_1 point de rencontre de sm'_1 et de $\omega c'_1$, et pour en déduire n on rabat le cercle de contact sur le plan horizontal; son centre i, i'_1 est rabattu en I_2. Le point cherché n, n'_1 est rabattu en N_2 et dans le relèvement vient en n, n'_1; donc sn est la projection horizontale de SN. Elle rencontre $m'_1\mu_1$ au point m et m, m'_1 est un point quelconque de l'intersection des deux surfaces. Le plan tangent en m, m'_1 au cylindre a pour trace horizontale tt'_1 et le plan tangent au cône en ce point a pour trace horizontale sr, d'où la tangente $mt, m't'$ au point m, m' de la courbe d'intersection. Cette intersection présente deux points doubles réels : le point c, c' et le point $\omega'\omega$, que l'on a immédiatement.

Déterminons les points doubles en projection; l'intersection des plans de contour apparent horizontal dans les deux surfaces a pour projection horizontale ed. Le plan projetant horizontalement cette droite coupe le cylindre suivant leux génératrices; dans le système x_1y_1 le point d, d'_1 se déduit de ce ce que l'on a d'_1, et on procède comme pour obtenir précédemment m connaissant m'_1.

Pour la ligne des points doubles en projection verticale on prend l'intersection ωq, $\omega' q'$ des plans de contour apparent vertical.

Les autres points remarquables sont ceux situés sur les contours apparents des deux surfaces. On a les projections verticales de ces points dans le système auxiliaire x_1y_1 en cherchant les projections verticales dans ce système des génératrices du cône qui passent par ces points; on en déduit de suite les projections de ces points remarquables dans le système xy. On a ainsi g'_1, d'où on arrive à g, g' situé sur une génératrice de contour apparent horizontal du cylindre; de même pour l, l'_1, pour j, j' et pour p, p'

N. Charruit.

(A fait l'épure juste : M. Ronzel, du lycée de Clermont.)

QUESTIONS PROPOSÉES

66. — Étant données les équations des trois côtés d'un triangle et les coordonnées d'un point du plan de ce triangle, reconnaître dans quelle région se trouve ce point par rapport au triangle.

(B. N.)

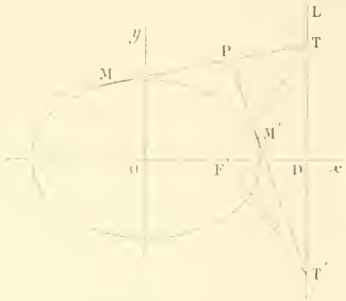
67. — On considère une ellipse E et un point P situé dans son plan. Trouver le lieu du point M tel que les tangentes menées du point P et du point M à l'ellipse E, forment un quadrilatère circonscriptible à un cercle.

(P. Puig, professeur au lycée de Belfort.)

68. — Construire la courbe ayant pour équation

$$2y = \pm\sqrt{6x - x^2} \pm \sqrt{6x + x^2} \pm \sqrt{36 - x^2}.$$

69. On donne une ellipse rapportée à ses axes :



1° Trouver l'équation du système des tangentes menées à cette courbe par un point donné P. — On prolonge ces tangentes PM, PM' jusqu'à la rencontre de la directrice DL en T et T'; trouver le lieu des positions du point P pour que le point D soit le milieu de TT'. — Expliquer géométriquement le résultat.

2° Lieu du point P pour que l'angle TFT' soit droit. — Montrer que ce lieu est une conique C qui a aussi pour foyer F et pour directrice DL — Discuter cette conique.

3° L'ellipse donnée ayant ses foyers fixes et la conique C étant une hyperbole, trouver le lieu des projections du foyer F de toutes ces hyperboles sur leurs asymptotes.

4° Trouver l'enveloppe de la conique C quand l'ellipse donnée est variable, mais a ses foyers fixes.

Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1890. 1re session.)

70. — Deux droites passent respectivement par les points fixes A et B, et interceptent une longueur donnée h sur l'axe $y'y$.

1° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre M de ces droites.

2° Cette courbe C passe par A et B, on mène les tangentes en A et B qui se coupent en P; lieu de ce point P quand on fait varier h.

3° Si le point B reste fixe et si le point A se déplace sur $x'x$, la longueur h étant constante, quelle ligne décriront les points de la courbe C pour lesquels la tangente est parallèle à AB?

4° Trouver le lieu des foyers de cette nouvelle courbe, quand on fait varier h. — Construire et indiquer la disposition particulière des lignes dont se compose ce dernier lieu.

Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1890, 2e session.)

71. — Démontrer qu'il existe sur toute strophoïde oblique dont le point double est O, deux points A, B tels que, M étant un point quelconque de la courbe, le rayon vecteur OM partage en deux parties égales l'angle AMB. Déterminer la position des points A et B. Démontrer ensuite que, si l'on décrit de O comme centre, avec un rayon donné R, un cercle qui coupe la strophoïde en N, ce point est, de tous ceux du cercle, celui pour lequel la somme des distances aux points A et B est maximum ou minimum.

(P. Barbarin, professeur au lycée de Toulon.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 4708 — 91.

1re Année. No 7. Avril 1891.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ALGÈBRE

35. — *Le déterminant principal déduit du tableau des éléments d'un déterminant symétrique gauche est de degré pair.*

Le théorème à démontrer revient à ceci : dans un déterminant symétrique gauche Δ, si tous les mineurs de degré $2k$ sont nuls, il en est de même de tous les mineurs de degré $2k-1$.

Je poserai $2k-1=r$ et je désignerai un mineur de degré $2k-1$ par

$$D\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_r\\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r\end{pmatrix},$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ désignant les rangs des lignes et $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r$ les rangs des colonnes de Δ auxquelles les éléments de D appartiennent.

Soit p le nombre des β qui sont égaux à l'un des α; je puis supposer par exemple

$$\alpha_1=\beta_1, \quad \alpha_2=\beta_2, \dots \quad \alpha_p=\beta_p, \quad \alpha_{p+k}\neq\beta_{p+k}.$$

Le mineur D contient alors p éléments de la diagonale principale du déterminant gauche; je dirai alors que D renferme p zéros et je vais démontrer que, si l'on suppose nuls tous les mineurs D qui renferment plus de p zéros, il en est de même de ceux qui renferment p zéros.

Soit d'abord $p<r-1$. Je considère le mineur de degré $r+1=2k$

$$D_1\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \alpha_{p+2} & \dots & \alpha_r\\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_p & \alpha_{p+1} & \beta_{p+1} & \beta_{p+2} & \dots & \beta_r\end{pmatrix}.$$

C'est un mineur du déterminant, car β_{p+1} est différent de tous les α et α_{p+1} de tous les β. Il est nul puisque tous les mineurs de degré $2k$ sont supposés nuls. Je considère les mineurs de D_1 relatifs à la ligne α_{p+2}, c'est-à-dire qui s'obtiennent en supprimant la ligne α_{p+2} et une colonne arbitraire; ce sont des mineurs D de degré r renfermant au moins $p+1$ zéros, et par suite nuls par hypothèse. Il en est de même des mineurs de D_1 relatifs aux éléments de la colonne β_{p+2}. Les mineurs du premier ordre de D_1 relatifs à tous les éléments d'une ligne et d'une colonne étant nuls, tous les mineurs de D_1 et en particulier D sont nuls.

La démonstration suppose $p<r-1$ ou $p+2\leqslant r$, puisqu'elle repose sur l'existence de α_{p+2} et de β_{p+2}. Il reste à démontrer que les mineurs D qui renferment $r-1$ et r zéros sont nuls; c'est ce qui résulte immédiatement des propriétés élémentaires des déterminants gauches; ceux qui renferment r zéros sont nuls comme déterminants gauches de degré impair et ceux qui en renferment $r-1$ comme mineurs du premier ordre de déterminants gauches de degré pair nuls par hypothèse. La proposition est donc complètement établie.

Émile Borel.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

28. — *On donne deux axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, *un cercle de centre* O *et de rayon* a *et une droite* PQ *qui passe par le point* O *et dont le coefficient angulaire est* m.

1° Trouver l'équation générale des coniques S *qui passent par les points d'intersection de la droite* PQ *et du cercle* O *et qui sont tangentes à ce cercle, au point* A *où il rencontre le demi-axe* Ox.

2° Trouver le lieu des centres de toutes ces coniques. Ce lieu est une conique C. *Déterminer son centre, ses axes et les tangentes aux points situés sur l'axe des* x. *Enfin construire cette conique* C.

3° Séparer sur la conique C *les centres d'ellipse des centres d'hyperbole.*

4° Dans l'hypothèse où PQ *tourne autour du point* O, *trouver le lieu du pôle de la droite* PQ *par rapport à la conique* C, *puis le lieu du point d'intersection de la droite* PQ *avec les asymptotes de la conique* C, *enfin le lieu des sommets et le lieu des foyers de la conique* C.

1° Équation générale. — Les coniques S passant par l'intersection du cercle représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

avec le système des deux droites définies par les équations

$$y - mx = 0 \qquad \text{et} \qquad x - a = 0,$$

leur équation générale est $\lambda(x^2 + y^2 - a^2) + (y - mx)(x - a) = 0.$

2° Lieu des centres. — Les équations qui définissent le centre d'une conique S sont

$$2\lambda x + (y - mx) - m(x - a) = 0,$$

et

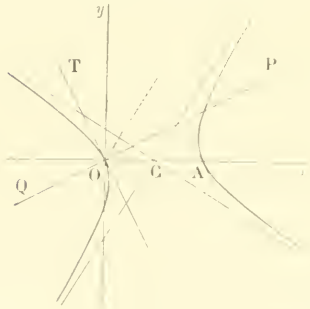
$$2\lambda y + x - a = 0.$$

On aura donc l'équation du lieu des centres des coniques S en éliminant λ entre ces deux équations. On trouve ainsi l'équation

$$y(y - mx) - (x - a)(x + my) = 0,$$

que l'on peut écrire ainsi : $y^2 - 2mxy - x^2 + a(x + my) = 0.$

Le lieu est donc une hyperbole équilatère qui passe par l'origine et par le point A.



On voit de plus que la tangente OT à l'origine, qui a pour équation

$$x + my = 0,$$

est perpendiculaire à PQ et que le centre a pour coordonnées

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = 0.$$

C'est le point C milieu de OA.

Cherchons les asymptotes. Le centre étant sur OA, les deux directions OT et OA sont conjuguées. Comme l'hyperbole est équilatère, les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les deux droites OT et OA, ou encore évidemment par les deux droites Oy et PQ. En menant par le point C des parallèles à ces bissectrices, on a donc les asymptotes. La construction de la conique C n'offre plus de difficulté.

3° Séparation des centres d'ellipse des centres d'hyperbole. — Soit un point (x_1, y_1) de la conique C, c'est-à-dire un point pour lequel on a

$$y_1^2 - 2mx_1y_1 - x_1^2 - a(x_1 + my_1) = 0. \qquad (1)$$

Le genre de la conique S qui a pour centre (x_1, y_1) dépend du signe de

$$1 - 4\lambda(\lambda - m),$$

sous la condition $$\lambda = \frac{a - x_1}{2y_1}, \qquad \text{(Voir les équations du centre.)}$$

Il dépend donc du signe de l'expression

$$1 - 4\frac{a - x_1}{2y_1} \times \frac{a - x_1 - 2my_1}{2y_1},$$

ou de la suivante: $$y_1^2 - (a - x_1)^2 + 2my_1(a - x_1),$$

qui s'écrit encore, quand on tient compte de l'identité (1),

$$a(x_1 + my_1 - a).$$

Ainsi, le genre de la conique S dépend du signe de

$$x_1 + my_1 - a,$$

car a est positif, par hypothèse.

Or l'équation $$x + my - a = 0$$

représente la droite menée par A perpendiculairement à PQ, c'est-à-dire la tangente en A à la conique C. Par conséquent, si le point (x_1, y_1) est sur la branche de droite, comme $x_1 + my_1 - a$ est positif, ce point est un centre d'hyperbole; s'il est sur la branche de gauche, comme $x_1 + my_1 - a$ est négatif, c'est un centre d'ellipse.

4° *Lieu du pôle de la droite* PQ. — Le pôle de PQ est donné par

$$\frac{2x + 2my - a}{m} = \frac{2mx - 2y - am}{-1} = \frac{-ax - amy}{0};$$

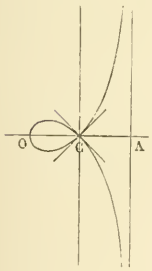
il est alors à l'intersection des droites représentées par

$$x + my = 0$$

et $$(1 + m^2)(2x - a) = 0.$$

Le lieu de ce point est donc la droite ayant pour équation $x = \frac{a}{2}$; c'est-à-dire la parallèle à Oy menée par le milieu de OA.

5° *Lieu des points d'intersection de* PQ *avec les asymptotes de* C. — Transportons l'origine au point C, en conservant aux axes leurs directions. L'équation de la droite PQ est



$$y = m\left(x + \frac{a}{2}\right);$$

celle des asymptotes de l'hyperbole C est

$$y^2 - x^2 - 2mxy = 0.$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant m entre ces deux équations. On trouve ainsi

$$y^2 = x^2 \frac{x + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} - x}.$$

et l'on voit que le lieu est la strophoïde droite représentée par la figure.

6° *Lieu des sommets de l'hyperbole* C. — Conservons le nouveau système d'axes. L'équation de l'hyperbole C est

$$y^2 - x^2 - 2mxy + \frac{a^2}{4} = 0.$$

On aura l'équation du lieu en éliminant m entre cette équation et celle des axes, qui est

$$m(x^2 - y^2) - 2xy = 0.$$

On obtient $$(y^2 + x^2)^2 = \frac{a^2}{4}(x^2 - y^2).$$

Le lieu est une lemniscate qui passe par les points O et A.

7° *Lieu des foyers.* — Prenons toujours les mêmes axes. Désignons par x et y les coordonnées d'un sommet et par X et Y celles du foyer voisin. On a les relations

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il résulte de là que le lieu des foyers est une seconde lemniscate homothétique à la précédente. Le centre d'homothétie est le point O et le rapport d'homothétie $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

A. Pocillart, lycée de Clermont.

Autres bonnes solutions par MM. A. Audouin, élève de marine au lycée de Cherbourg ; Auzeram (lycée de Toulouse) ; A. Delperre, élève de marine au collège de Dieppe ; L. Gambey (Louis-le-Grand) ; F. Geneix-Chabanier, à Marseille ; C. H. ; L. Jossinet (lycée de Troyes) ; F. Nau, A. de Seguins, à Paris ; I. Perrée (Condorcet) ; Ed. Husson (Nancy). En outre, MM. Perrée et Joyant (Condorcet) ont envoyé une solution entièrement géométrique.

---

30. — *On considère les coniques circonscrites à un triangle et telles que les normales à ces coniques menées par les sommets du triangle soient concourantes. Lieu de leur point de concours; même question pour les coniques inscrites, les normales étant menées aux points de contact des côtés du triangle.*

Prenons le triangle donné pour triangle de référence. L'équation générale des coniques circonscrites est

$$\lambda yz + \mu zx + \nu xy = 0.$$

Cherchons l'équation de la normale au sommet A. L'équation de la tangente en ce point est

$$\mu z + \nu y = 0.$$

Celle de la normale sera de la forme $\mu' z + \nu' y = 0$.

Or, on sait que pour que les deux droites représentées par

$$lx + my + nz = 0, \qquad l'x + m'y + n'z = 0,$$

soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$ll' + mm' + nn' - (mn' + nm')\cos A - (nl' + ln')\cos B - (lm' + ml')\cos C = 0.$$

On aura donc $$\mu\mu' + \nu\nu' - (\mu\nu' + \nu\mu')\cos A = 0,$$

d'où $$\frac{\mu'}{\mu\cos A - \nu} = \frac{\nu'}{\mu - \nu\cos A}.$$

L'équation de la normale est donc

$$(\mu\cos A - \nu)z + (\mu - \nu\cos A)y = 0$$

ou $$\mu(y + z\cos A) = \nu(z + y\cos A).$$

Les équations des normales aux points B et C seront de même

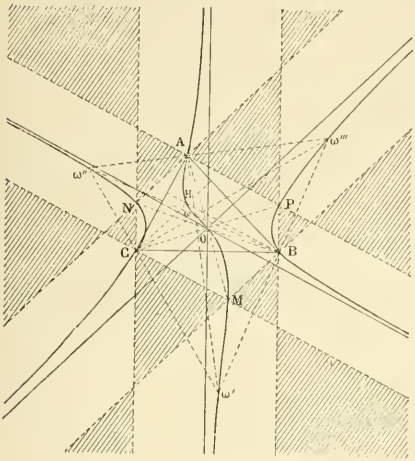
$$\nu(z + x\cos B) = \lambda(x + z\cos B),$$

$$\lambda(x + y\cos C) = \mu(y + x\cos C).$$

Éliminons λ, μ, ν entre ces trois équations, nous aurons l'équation du lieu. Il suffit de les multiplier membre à membre :

$$(y + z\cos A)(z + x\cos B)(x + y\cos C) = (z + y\cos A)(x + z\cos B)(y + x\cos C).$$

Le lieu cherché est donc une cubique que nous allons construire. Observons pour cela que la droite $y + z\cos A = 0$ passe par le point A et est perpendiculaire au côté AB, et ainsi des droites semblables. Construisons toutes ces droites, et comme le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est un point du lieu, on détermine des régions du plan (couvertes de hachures sur la figure) dans lesquelles ne peuvent se trouver aucun point de la courbe. Les points A, B, C, M, N, P appartiennent au lieu; de plus la cubique a trois points à l'infini dans les directions perpendiculaires aux côtés du triangle. Les droites AM, BN, CP passent par le centre O du cercle circonscrit; on a ainsi trois cordes de la courbe qui sont divisées en deux parties égales par le point O de cette même courbe; il en résulte que le point O est centre de la cubique. Les asymptotes passent par ce centre et sont perpendiculaires aux côtés du triangle.



On peut mettre l'équation sous la forme

$$x(y^2 - z^2)(\cos B\cos C - \cos A) + y(z^2 - x^2)(\cos C\cos A - \cos B) + z(x^2 - y^2)(\cos A\cos B - \cos C) = 0,$$

ce qui montre que la cubique passe par les centres des cercles inscrit et ex-inscrits au triangle ABC. On peut vérifier également qu'elle passe par l'orthocentre du même triangle.

Ces données sont plus que suffisantes pour tracer la courbe.

Remarque. — Si le triangle ABC est isocèle, le lieu se décompose en une droite : la hauteur issue du sommet, et une hyperbole ayant pour asymptotes les perpendiculaires aux milieux des côtés égaux et passant par les extrémités de la base.

Si le triangle est équilatéral, le lieu se réduit aux trois hauteurs.

Considérons maintenant les coniques inscrites, dont l'équation générale est

$$\sqrt{\lambda x} + \sqrt{\mu y} + \sqrt{\nu z} = 0.$$

La droite qui joint A au point de contact du côté BC a pour équation

$$\mu y - \nu z = 0.$$

Une droite quelconque passant par ce point de contact aura donc pour équation

$$\mu y - \nu z + lx = 0.$$

En exprimant que cette droite est perpendiculaire à BC, on obtient

$$l = \mu\cos C - \nu\cos B,$$

d'où l'équation de la normale,

$$\mu(y + x\cos C) = \nu(z + x\cos B).$$

Les deux autres seront

$$\nu(z + y\cos A) = \lambda(x + y\cos C),$$

$$\lambda(x + z\cos B) = \mu(y + z\cos A).$$

Éliminons λ, μ, ν; on obtient

$$(z + y \cos A)(x + z \cos B)(y + x \cos C) = (y + z \cos A)(z + x \cos B)(x + y \cos C);$$

on obtient le même lieu que précédemment.

On voit ainsi que l'orthocentre et les centres des cercles inscrit et ex-inscrits au triangle ABC sont sur cette courbe.

E. Jacquest, lycée de Dijon.

Ont résolu la même question : MM. Th. Got, lycée de Montpellier; Lemoult, soldat au 93e de ligne, à La Roche-sur-Yon; Perrée, lycée Condorcet; Ronzel, lycée de Clermont.

M. J.-G. Darboux, élève au lycée Louis-le-Grand, observe qu'on pouvait démontrer *a priori* l'identité des deux lieux.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que les normales en A, B, C à une conique circonscrite concourent en un point M, est que les perpendiculaires menées par A, B, C respectivement aux droites MA, MB, MC rencontrent les côtés opposés en trois points a, b, c en ligne droite; et cette condition s'écrit

$$\frac{\sin aAB}{\sin aAC} \cdot \frac{\sin bBC}{\sin bBA} \cdot \frac{\sin cCA}{\sin cCB} = 1. \qquad (1)$$

D'autre part, pour que les normales à une conique inscrite menées aux points de contact avec les côtés du triangle concourent au même point M, il faut et il suffit qu'en projetant M en α, β, γ respectivement sur les côtés BC, CA, AB du triangle, les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ soient concourantes, c'est-à-dire qu'on ait

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1. \qquad (2)$$

Il est aisé de voir que ces deux relations sont conséquences l'une de l'autre.

En effet, on a, au signe près.

$$\frac{A\gamma}{AM} = \sin AM\gamma = \sin aAB, \qquad \frac{A\beta}{AM} = \sin AM\beta = \sin aAC,$$

d'où

$$\frac{A\gamma}{A\beta} = \frac{\sin aAB}{\sin aAC}.$$

On a trois relations analogues, et en les multipliant membre à membre, on voit que les premiers membres des relations (1) et (2) ont la même valeur absolue; on constate aisément qu'ils ont des signes contraires. Les deux relations sont donc conséquences l'une de l'autre, et tout point M d'un des lieux est situé sur l'autre.

Menons par les sommets A, B, C du triangle les tangentes à la conique circonscrite. On sait que les points D, E, F, où elles rencontrent les côtés opposés, sont en ligne droite. On a donc la relation

$$\frac{\sin DAB}{\sin DAC} \cdot \frac{\sin EBC}{\sin EBA} \cdot \frac{\sin FCA}{\sin FCB} = 1. \qquad (1)$$

Soit M un point du lieu ; les angles que fait la droite AD avec AB et AC sont, à un multiple près de π, égaux à ceux que fait AM avec les perpendiculaires élevées en A sur AB et AC.

Or, si l'on prend le triangle ABC pour triangle de référence, en supposant les coordonnées trilinéaires normales, les équations des perpendiculaires élevées en A, sur AB et AC, sont $y + z \cos A = 0$ et $z + y \cos A = 0$. Donc si M a pour coordonnées x, y, z, les rapports $\frac{\sin DAB}{\sin DAC}$ et $\frac{y + z \cos A}{z + y \cos A}$ ont même valeur absolue. De plus ils ont même signe : en effet, il en est évidemment ainsi quand M est sur la bissectrice intérieure de l'angle en A ; il en est donc de même pour toute position de M, car ces rapports

ne peuvent changer de signe qu'en même temps, quand M se déplace dans le plan. Par suite l'équation du lieu est

$$\frac{y + z\cos A}{z + y\cos A}\cdot\frac{z + x\cos B}{x + z\cos B}\cdot\frac{x + y\cos C}{y + x\cos C} = 1.$$

Le lieu est donc une cubique qui passe par les sommets du triangle, par le centre O du cercle circonscrit, par les centres I, I_a, I_b, I_c des cercles inscrit et ex-inscrits, et par les points α, β, γ, diamétralement opposés à A, B, C sur le cercle circonscrit. Tous ces résultats sont évidents également par la géométrie.

On voit aussi que la courbe est sa propre transformée par points inverses, ce qu'on peut démontrer *a priori* de la manière suivante. A la droite D E F correspond, dans la transformation inverse, une conique Σ circonscrite au triangle; l'angle droit des transversales AM, AD se conserve; donc les normales en A, B, C à la conique S ont pour transformées les normales en A, B, C à la conique Σ. Ces dernières concourent en un point M_i, inverse de M; le point M_i est donc assujetti à la même condition que le point M, et appartient au même lieu.

Par suite la cubique passe par le point inverse du centre O du cercle circonscrit, c'est-à-dire par l'orthocentre H, et par des points inverses de α, β, γ, c'est-a-dire par les points à l'infini sur les hauteurs.

Considérons maintenant une conique tangente à BC, CA, AB en A_1, A_2, A_3, et telle que les normales en A_1, A_2, A_3 concourent en un point N. Le théorème de Carnot donne alors

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B} = -1, \qquad (2)$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg} A_1NB}{\operatorname{tg} A_1NC}\cdot\frac{\operatorname{tg} B_1NC}{\operatorname{tg} B_1NA}\cdot\frac{\operatorname{tg} C_1NA}{\operatorname{tg} C_1NB} = -1.$$

D'autre part, on a évidemment

$$\frac{\sin NAB}{\sin NAC}\cdot\frac{\sin NCA}{\sin NCB}\cdot\frac{\sin NBC}{\sin NBA} = 1.$$

Les angles de sommet N sont, à des multiples de π près, les compléments des angles formés aux sommets du triangle par AN, BN, CN. Donc les conditions (1) et (2) s'équivalent, car les compléments de ces angles aux sommets ne sont autres que les angles formés aux sommets du triangle par AD, BE, CF.

Ce second mode de génération du lieu montre évidemment que le point O est centre de la courbe. Il résulte de cette symétrie que les asymptotes sont nécessairement les médiatrices, quand la cubique ne se décompose pas, et qu'il y a inflexion en O.

La courbe ne se décompose d'ailleurs que si le triangle est équilatéral. Il suffit de remarquer que, si la cubique se décompose en une conique et une droite, ces dernières seraient inverses l'une de l'autre, et l'équation de la cubique aurait la forme

$$(lx + my + nz)(lyz + mzx + nxy) = 0,$$

qu'on ne peut identifier avec celle qu'on a déjà trouvée, qu'en posant $l = m = n = 0$. Ce raisonnement n'est en défaut que si la courbe est composée de trois des six bissectrices du triangle. Mais comme elle doit passer par O, il faut que les points I et O se confondent, c'est-à-dire que le triangle soit équilatéral. Dans ce cas, en effet, la cubique se réduit aux trois bissectrices intérieures.

Elle ne peut dans aucun autre cas être unicursale et pourvue d'un seul point double, puisque de celui-là on en pourrait toujours déduire un second.

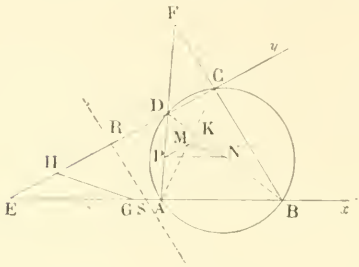
(Cette cubique est connue; elle a été complètement étudiée dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (1878), et présente plusieurs autres modes de génération.)

H. de Montille, lycée Louis-le-Grand.

41. — *Soit* ABCD *un quadrilatère inscriptible; soit* E *le point de concours des côtés opposés* AB, DC *et soit* F *le point de concours des côtés* AD, BC; *on prend sur* EA, EG = AB *et sur* ED, EH = CD.

Démontrer que GH *est le double de la droite qui joint les milieux des diagonales* AC, BD *et que* EF *est tangente au cercle circonscrit au triangle* EGH.

Prenons pour axes les droites EA et ED. Soient a, b les abscisses des points A et B; c, d les ordonnées des points C et D.



Les coordonnées du point M, milieu de AC, sont $\frac{a}{2}, \frac{c}{2}$; celles du point N, milieu de BD, sont $\frac{b}{2}, \frac{d}{2}$; par suite

$$MN = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2 + 2(a-b)(c-d)\cos\theta},$$

θ étant l'angle des axes. D'autre part, l'abscisse de G est $b - a$, l'ordonnée de H est $c - d$; par suite

$$GH = \sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2 + 2(a-b)(c-d)\cos\theta};$$

donc $$GH = 2MN.$$

La droite EF joint l'origine E au point de rencontre des droites AD et BC, qui ont respectivement pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{d} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{b} + \frac{y}{c} - 1 = 0.$$

Retranchons membre à membre ces deux équations; on a l'équation de EF :

$$x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + y\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) = 0,$$

qui peut s'écrire, en observant que $ab = cd$,

$$x(b-a) + y(c-d) = 0.$$

D'autre part, le cercle circonscrit au triangle EGH a pour équation

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - x(b-a) - y(c-d) = 0,$$

et l'on voit que la tangente à l'origine est la droite EF.

Remarquons que la première propriété démontrée subsiste pour un quadrilatère quelconque.

C. H.

Solution géométrique. — Joignons les points M et N au milieu P de AD. Les deux triangles EHG et MNP sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels; en effet, MP est parallèle à CD et égal à sa moitié, NP est parallèle à AB et égal à sa moitié. Comme EH = 2MP, il en résulte que GH = 2MN.

L'axe radical du cercle donné et du cercle circonscrit au triangle EGH est la droite RS qui joint les milieux R et S de EC et EB, puisqu'on a visiblement

$$RH \times RE = RD \times RC,$$
$$SG \times SE = SA \times SB.$$

Or les polaires d'un point quelconque par rapport à tous les cercles passant par l'intersection du cercle donné et du cercle EGH passent par un point fixe. La polaire du point E par rapport au cercle donné est la droite FK; la polaire du même point E par rapport au cercle formé par l'axe radical RS et la droite de l'infini est la droite BC; KF et BC se coupent en F; et c'est par ce point F que passeront

les polaires du point E par rapport à tous les cercles du faisceau. Il en résulte que EF est la polaire de E par rapport au cercle EGH, c'est-à-dire que cette droite est tangente en E à ce cercle.

AUZERAM, lycée de Toulouse.

[Solutions analogues par Mme Vve Prime (Bruxelles); par MM. Audouin (lycée de Cherbourg); G. Cuny (école Saint-Sigisbert, à Nancy); E.-J. (lycée de Troyes); Auguste Lecoquierre (lycée de Rouen); Gaston Leverve (lycée de Rouen); L. Perrée (Condorcet); L.-P. Randon (Louis-le-Grand).]

---

43. — *Lieu du centre de gravité d'un triangle équilatéral inscrit ou circonscrit à une conique donnée.*

Supposons que la conique donnée soit une ellipse définie par l'équation

$$S \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Si R est le rayon du cercle inscrit à un triangle équilatéral de centre (α, β), ce cercle a pour équation

$$S' \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - R^2 = 0.$$

Le cercle circonscrit a même centre et un rayon double ; son équation est donc

$$S'_1 \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - 4R^2 = 0.$$

Enfin, le cercle par rapport auquel le triangle est autopolaire a même centre et pour rayon $R\sqrt{2}$; son équation est

$$S'_2 \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2R^2 = 0.$$

Nous observerons que, réciproquement, tout triangle circonscrit à S' et autopolaire par rapport à S_2, est un triangle équilatéral de centre (α, β); de même tout triangle inscrit dans S'_1 et autopolaire par rapport à S'_2 est aussi un triangle équilatéral de centre (α, β).

1°. — Cherchons le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans la conique S. Si (α, β) est un point du lieu, le triangle correspondant est autopolaire par rapport à S'_2 et inscrit dans S; donc en prenant les invariants simultanés de S et S'_2, on aura $\Theta' = 0$, c'est-à-dire

$$b^2(\alpha^2 + 2R^2) + a^2(\beta^2 + 2R^2) - a^2b^2 = 0$$

ou

$$b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = -2(a^2 + b^2)R^2. \qquad (1)$$

D'autre part, le même triangle est circonscrit à S' et inscrit dans S; donc les invariants relatifs à S et S' donnent

$$\Theta'^2 - 4\Delta'\Theta = 0$$

ou

$$[b^2(\alpha^2 - R^2) + a^2(\beta^2 - R^2) - a^2b^2]^2 - 4R^2a^2b^2[(a^2 + b^2) - (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)] = 0. \qquad (2)$$

Éliminant R^2 entre (1) et (2), on aura l'équation du lieu. On peut poser pour cela

$$b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2 = H;$$

on tire alors de (1)

$$R^2 = -\frac{H}{2(a^2 + b^2)};$$

en remplaçant dans (2), on voit aisément que H est en facteur, et en le supprimant, il vient

$$b^2\alpha^2(a^2 + 3b^2)^2 + a^2\beta^2(b^2 + 3a^2)^2 - a^2b^2c^4 = 0,$$

qui représente une ellipse ayant mêmes axes que l'ellipse donnée.

2°. — Soient (α, β) le centre d'un triangle équilatéral circonscrit à S. Comme ce triangle est aussi autopolaire à S'_2, en calculant les invariants relatifs à S et S'_2, on aura $\Theta = 0$, ou

$$a^2b^2(a^2 + b^2) - a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2 + 2R^2) = 0$$

ou

$$2R^2 = a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2. \qquad (3)$$

Ce même triangle est circonscrit à S et inscrit dans S'_1; on a donc, entre les invariants de ces deux coniques,

$$\Theta^2 - 4\Delta\Theta' = 0,$$

$$[a^4b^2 + a^2b^4 - a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2 - 4R^2)]^2 = -4a^4b^4[b^2(\alpha^2 - 4R^2) + a^2(\beta^2 - 4R^2) + a^2b^2] \qquad (4)$$

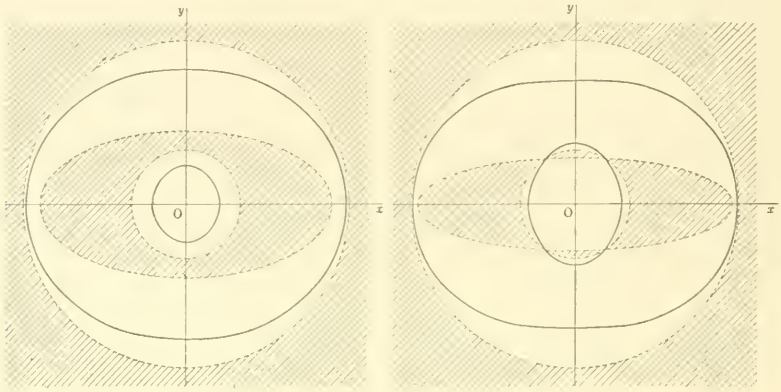
Éliminant R^2 entre (3) et (4), on aura l'équation du lieu. On obtient ainsi, en remplaçant α et β par x et y,

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)[9(x^2 + y^2) - a^2 - b^2] + 4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0. \qquad (5)$$

C'est une courbe du quatrième degré, bicirculaire, qu'on peut construire aisément en passant en coordonnées polaires.

On obtient $$9\rho^4 - 2\rho^2(5a^2 + 3b^2 - 2c^2 \sin^2 \omega) + c^4 = 0,$$

et l'on voit aisément qu'on a toujours quatre racines réelles, deux à deux égales et de signes contraires. La courbe se compose donc de deux ovales symétriques par rapport aux axes de coordonnées.



En se reportant à l'équation (5), on remarque que l'ellipse donnée et les deux cercles

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2,$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{9}$$

déterminent des régions du plan où peut se trouver la courbe. Le premier de ces cercles est le cercle orthoptique, le deuxième est un cercle de rayon trois fois moindre qui ne rencontre l'ellipse que si $a^2 \geqslant 8b^2$.

On a donc les deux formes de courbe ci-contre, correspondant : la première au cas de $a^2 < 8b^2$, et la deuxième au cas de $a^2 > 8b^2$.

(H. Pilleux, lycée Louis-le-Grand.)

[Ont résolu la même question : MM. J.-G. Darboux, lycée Louis-le-Grand ; L. Perrée, lycée Condorcet.]

Remarque. — On peut obtenir très simplement le lieu du centre de gravité d'un triangle équilatéral inscrit dans une conique donnée.

Supposons d'abord que la conique soit à centre, et pour fixer les idées, soit une ellipse.

Rapportons la courbe à ses axes de symétrie et soient (α, β) les coordonnées du centre de gravité d'un triangle équilatéral inscrit à l'ellipse. R étant le rayon du cercle circonscrit à ce triangle. L'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

Celle de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Par suite l'équation aux abscisses des points d'intersection de ces deux courbes est la suivante :

$$c^4x^4 - 4a^2c^2\alpha x^3 + \ldots = 0,$$

de sorte que la somme des racines est égale à $\frac{4a^2\alpha}{c^2}$.

Trois des points communs à l'ellipse et au cercle sont les sommets du triangle équilatéral considéré ; si l'on désigne par x l'abscisse du quatrième point d'intersection, en remarquant que la somme des abscisses des sommets du triangle équilatéral est égale à 3α, on a $3\alpha + x = \frac{4a^2\alpha}{c^2}$,

d'où
$$x = \frac{2a^2 - 3c^2}{c^2}\alpha = \frac{3b^2 + a^2}{c^2}\alpha.$$

On trouve de même pour l'ordonnée correspondante

$$y = -\frac{3a^2 + b^2}{c^2}\beta.$$

Donc on obtient l'équation du lieu en écrivant que le point (x, y) est sur l'ellipse, ce qui donne

$$(3b^2 + a^2)^2\frac{\alpha^2}{a^2} + (3a^2 + b^2)^2\frac{\beta^2}{b^2} = c^4.$$

Si la conique donnée est une parabole, $(y^2 - 2px = 0)$, l'équation aux abscisses des points d'intersection avec le cercle circonscrit à un triangle équilatéral inscrit lui-même à la parabole est

$$x^4 + 4(p - \alpha)x^3 + \ldots = 0.$$

d'où, en raisonnant comme plus haut, $x = \alpha - 4p$; puis, en remarquant que la somme des ordonnées est nulle : $y = -3\beta$. De sorte que

$$9\beta^2 = 2p(\alpha - 4p)$$

est l'équation du lieu.

---

44. — *L'aire latérale d'un cône de révolution limité par une section elliptique a pour mesure* $\frac{S \sin\varphi}{\sin\alpha}$, *S désignant l'aire de la base, φ l'angle que fait son plan avec l'axe du cône et α le demi-angle d'ouverture du cône.*

Désignons par V le volume du cône, par S l'aire de la base elliptique et par h la hauteur; on sait que

$$V = \frac{S.h}{3}. \qquad (1)$$

Soit P la trace de l'axe du cône sur le plan de la base; le point P est à égale distance K de toutes les génératrices. Il en résulte que l'on a aussi, en désignant par S′ l'aire latérale,

$$V = \frac{S'.K}{3}. \qquad (2)$$

La comparaison des formules (1) et (2) donne

$$S' = S.\frac{h}{K}.$$

Mais en désignant par A le sommet du cône, par α le demi-angle d'ouverture et par φ l'angle que le plan de la section elliptique fait avec l'axe AP, on a immédiatement $h = AP.\sin\varphi$, $K = AP \sin\alpha$;

donc
$$S' = S.\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}.$$

(M. G.-B. Verrina, à Voltri.)

Autres solutions : M. E. Jossinet, maître répétiteur au lycée de Troyes ; E. Marey-Monge (lycée Louis-le-Grand) ; Porrée, lycée (Condorcet) ; Cl Wavrant (lycée de Toulon).

Mme Vve F. Prime (Bruxelles) s'appuie sur le théorème suivant :

Si l'on porte, sur les normales en chacun des points d'une surface fermée convexe, des longueurs proportionnelles aux éléments de surface qui se trouvent aux pieds de ces normales et, si l'on donne à toutes les longueurs la direction de l'intérieur vers l'extérieur de la surface, la somme algébrique de leurs projections sur un axe quelconque est identiquement nulle.

Dans le cas du théorème de M. Jamet, la surface peut être regardée comme fermée par une face elliptique et une infinité de facettes triangulaires. Les perpendiculaires à la face elliptique étant parallèles et de même sens, peuvent être remplacées par une perpendiculaire unique égale à S et faisant avec l'axe de cône un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \varphi$; tandis que les perpendiculaires aux facettes triangulaires font, avec le même axe, un angle constant égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Désignons l'une quelconque de ces perpendiculaires par s, nous aurons alors, en projetant sur l'axe de cône et en remarquant que la projection de s est opposée à celle de S :

$$S \sin \varphi = \Sigma s . \sin \alpha.$$

Mais

$$\Sigma s . \sin \alpha = \sin \alpha . \Sigma s;$$

donc

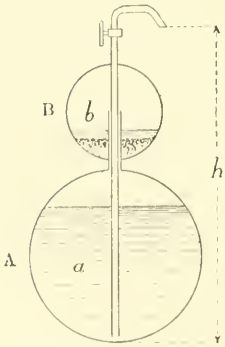
$$\Sigma s = \frac{S . \sin \varphi}{\sin \alpha}.$$

PHYSIQUE

45. — *Un appareil à eau de Seltz (système D. Fèvre) est formé de deux vases* A *et* B. *Soit* a *le volume du récipient* A, *et* b *celui du récipient* B. *On demande quel poids minimum de bicarbonate de soude il faudra employer pour que le liquide s'écoule de l'appareil très lentement et complètement.*

On donne le coefficient de solubilité c *de l'acide carbonique à la température de l'appareil. Cas particulier :* c = 1 *(coefficient à* 15°*).*

Examiner ce qui se produit quand le rapport $\frac{b}{a}$ *est négligeable. On prendra particulièrement* a = 5 *litres,* b = 1/2 *litre,* h = 54cm, *la pression étant de* 76cm *et la température de* 15°.



Les équivalents du bicarbonate de soude et de l'acide carbonique étant 84 et 44, si l'on désigne par p le poids d'acide carbonique qui se dégage et par x le poids de bicarbonate de soude qu'il faut introduire, on a

$$\frac{x}{p} = \frac{84}{44}; \qquad x = p\,\frac{21}{11}.$$

Si nous désignons par P_1 la pression de l'acide carbonique dans l'appareil la réaction terminée et avant que l'écoulement commence, on a

$$p = \frac{(a + b)1{,}293 \times 1{,}529}{1 + 15\alpha} \times \frac{P_1}{76}.$$

Tout revient à calculer P_1.

Considérons l'appareil à un certain moment, où le volume d'eau gazeuse est V et la pression P; il s'écoule un certain volume ΔV qui emporte avec lui une certaine masse de gaz $\Delta V.c.P$; il se produit une diminution de pression ΔP.

$\Delta V.c.P$ est la différence des quantités d'acide carbonique contenues dans l'appareil avant et après l'écoulement; on a donc

$$\Delta V.c.P = (Vc + a + b - V)P - [(V - \Delta V)c + a + b - (V - \Delta V)][P - \Delta P].$$

Si nous faisons tendre ΔV et ΔP vers 0, et si nous prenons ΔV ou ΔP comme infiniment petit principal, $\Delta P.\Delta V$ est un infiniment petit du second ordre que nous pourrons négliger. On peut alors écrire

$$\frac{1}{P}\cdot\frac{dP}{dV} = \frac{1}{V(c-1) + a + b}.$$

Intégrant, il vient $$L.P = \frac{1}{c-1} L.[V(c-1) + a + b] + C^{te}.$$

Pour $V = a$, $P = P_1$, et pour $V = 0$, P prend la valeur P_2, pression du gaz dans l'appareil quand toute l'eau est écoulée. On a donc

$$L.P_1 = \frac{1}{c-1} L(ac + b) + C^{te}; \qquad L.P_2 = \frac{1}{c-1} L(a + b) + C^{te};$$

d'où $$L.\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{c-1} L.\frac{ac + b}{a + b}.$$

Remontant à la fonction exponentielle, on a

$$P_1 = P_2\left(\frac{ac + b}{a + b}\right)^{\frac{1}{c-1}}.$$

Calculons maintenant P_2. L'air qui occupait le volume b à la pression 76^{cm} occupe à la fin le volume $a + b$; il supportera donc une pression égale à $76\,\frac{b}{a+b}$. Par suite F désignant la force élastique maxima de la vapeur d'eau à 15°, on a

$$P_2 = 76 + \frac{h}{13,6} - 76\,\frac{b}{a+b} - F.$$

Pour le cas où $c = 1$, P_1 prend la forme 1^∞; nous pouvons faire disparaître cette indétermination. Nous avons

$$\frac{ac + ab}{a + b} = \frac{ac + b + a - a}{a + b} = 1 + \frac{a(c-1)}{a+b}.$$

Posons $$\frac{a(c-1)}{a+b} = \frac{1}{m}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{c-1} = m\frac{a}{a+b}.$$

Par suite, $P_1 = P_2\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m\frac{a}{a+b}}$ et, en passant à la limite,

$$P_1 = P_2 e^{\frac{a}{a+b}}.$$

Si $\frac{b}{a}$ est négligeable, c'est-à-dire si b est sensiblement nul,

$$P_1 = P_2 e.$$

Application numérique. — On trouve, en appliquant les formules précédentes

$$P_2 = 72^{cm}, \qquad P_1 = 178^{cm}$$

Par suite,

$$p = \frac{5,5 \times 1,293 \times 1,529}{1 + 15\alpha} \cdot \frac{178}{76}$$

et

$$x = \frac{21}{11} \cdot \frac{5,5 \times 1,293 \times 1,529}{1 + 15\alpha} \times \frac{178}{76} = 46^{gr}.$$

(E. Marey-Monge, lycée Louis-le-Grand.)

Remarque. — Dans la pratique, on ne tire de l'appareil qu'une petite quantité d'eau à la fois; l'eau s'écoulant dans cette opération contient plus de gaz que si l'écoulement était lent; il faudra donc un excès d'acide carbonique, ce qui entraîne l'emploi d'un poids de bicarbonate de soude supérieur à 46^{gr}; on prend généralement environ 62 grammes de bicarbonate avec 50 grammes d'acide tartrique, afin que l'eau gazeuse jaillisse jusqu'au bout.

CONCOURS DE 1890 *(Suite).*

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Concours principal.

Géométrie analytique.

72. — On considère les coniques en nombre infini qui passent par deux points A et B et qui sont telles que pour chacune d'elles la droite AB soit l'un des deux diamètres conjugués égaux. On demande de déterminer :

1° Le lieu des foyers;

2° Le lieu des sommets de ces coniques.

(1er août. — 4 heures.)

Calcul.

Résoudre le triangle : $a = 2946^m,235$, $c = 1602^m,309$, $C = 22° 37' 11'',52$.

Résultats : 1° $A = 45° 00' 31'',23$ $B = 112° 22' 17'',25$ $b = 3852^m,45$

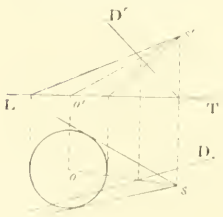
$S = 2182751^{mq},46$

2° $A' = 134° 59' 28'',77$ $B' = 22° 23' 19'',71$ $b' = 1586^m,79$

$S' = 899054^{mq},35$

(1er août. — 1 heure.)

Dessin graphique.



Etant donné un cône oblique à base circulaire, on mène par un point de son axe SO une droite D et par cette droite deux plans quelconques.

Construire l'intersection de ces plans avec la surface dudit cône.

(2 août. — 3 heures.)

Physique et chimie.

I. — Définition et mesure de la température. Thermomètre à mercure, thermomètre à air, pyromètres.

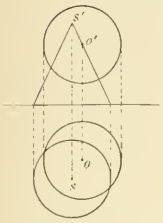
II. — Propriétés, fabrication et principaux usages industriels de l'acide sulfurique.

(4 août. — 3 heures.)

Concours supplémentaire (1).

Géométrie analytique.

73. — Discuter l'équation $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$. Rapporter cette courbe à ses axes, sachant que les axes primitifs des coordonnées sont rectangulaires.



74. — Construire la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation $\omega = \rho(\rho + 1)(\rho + 2)$.

(*22 octobre.*)

Dessin.

Intersection d'une sphère avec un cône de révolution droit.
L'épure servant de composition de dessin devra être passée à l'encre de Chine.

Calcul.

Résoudre le triangle : $A = 45^\circ$, $b = 1926^m,397$, $c = 801^m,154$.

Résultats : $B = 112^\circ\ 23'\ 4'',20$ $C = 22^\circ\ 36'\ 55'',80$ $a = 1473^m,17$ $S = 545653^{mq},32$.

Physique et chimie.

I. — Préparation et propriétés du phosphore. Ses principaux composés avec les autres métalloïdes.
II. — Détermination des indices de réfraction.
III. — Réglage et mise en service d'une balance de précision. Exécution d'une double pesée.

QUESTIONS PROPOSÉES

75. — Étant données les deux équations

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

quelle relation doit exister entre les coefficients pour que les deux équations ne puissent avoir une racine commune sans en avoir deux?

76. — Étant données les équations de quatre droites situées dans un même plan, trouver les coordonnées de ceux des six points d'intersection qui sont les sommets d'un quadrilatère convexe.

(Émile Borel.)

77. — On donne une conique (C) et un cercle qui a son centre en l'un des foyers de la conique. Par les points A et B où une tangente mobile au cercle rencontre la conique (C), on mène les deux autres tangentes au cercle. Trouver le lieu de leur point de rencontre.

(P. Aubert, professeur au lycée d'Orléans.)

(1) Ce concours, qui était réservé aux candidats admissibles et non admis à l'école polytechnique, ainsi qu'aux élèves de l'école des mines de Saint-Étienne renvoyés après une première année d'études, n'aura plus lieu à l'avenir.

78. — On abaisse d'un point du plan d'une ellipse les quatre normales à cette ellipse et l'on considère le quadrilatère formé par les tangentes à l'ellipse menées aux pieds des normales. Le lieu des points P tels que ce quadrilatère soit inscriptible dans un cercle se compose : 1° des diagonales du rectangle construit sur les axes de l'ellipse ; 2° des perpendiculaires à ces diagonales passant par le centre de l'ellipse ; 3° de la podaire du centre d'une hyperbole ayant même centre et mêmes directions d'axes que l'ellipse.

(E.-N. Barisien, capitaine au service géographique de l'armée.)

79. — Au milieu d'une enceinte entourée de glace fondante est placé un vase solide en laiton, entièrement clos, qui contient un certain poids d'eau privée d'air. Le vase et l'eau qu'il contient ayant été chauffés, on demande de décrire les différentes phases du refroidissement, et d'indiquer les particularités présentées par la vitesse du refroidissement suivant la quantité d'eau contenue dans le vase.

On admettra : que le rayonnement obéit à la loi de Newton ; — que la densité de la vapeur d'eau reste constante et égale à 0,622.

On négligera les variations du volume du vase ainsi que les variations du poids spécifique et de la chaleur spécifique de l'eau avec la température. On négligera aussi la différence des deux chaleurs spécifiques de la vapeur d'eau.

Données numériques générales :

Chaleur spécifique de la vapeur d'eau	0,37 par gramme.
Chaleur latente de vaporisation.	$606,5 - 0,695t$.

Tension maximum de la vapeur d'eau en millimètres de mercure :

à 80° : $\varpi = 355$, $\frac{d\varpi}{dt} = 14,4$

à 100° : $\varpi = 760$, $\frac{d\varpi}{dt} = 27,2$

à 120° : $\varpi = 1491$. $\frac{d\varpi}{dt} = 47,0$.

Application numérique. — Calculer les vitesses de refroidissement à 100° et 120°, en prenant pour unité la vitesse de refroidissement à 80°. dans le cas suivant :

Poids du vase	1 kilogrammme.
Chaleur spécifique du laiton.	0,086.
Volume intérieur.	1 litre.
Poids de l'eau contenue	$0^{gr},5886$

(*École normale, 1889.*)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 7166-3-91.

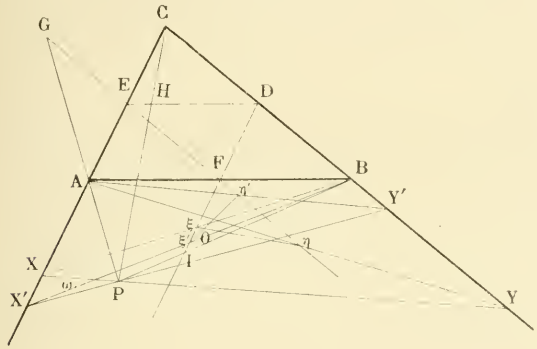
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION (1890)(*)

On donne un triangle ABC *et un point* P *dans son plan. Trouver le lieu des centres des coniques* Σ *inscrites au triangle* ABC *et vues du point* P *sous un angle donné* ω.

Soit XPX′ une position quelconque de l'angle ω; il s'agit de déterminer le centre O de la conique tangente aux trois côtés du triangle ABC et aux droites PX, PX′. On sait, d'après un théorème de Newton, que toutes les coniques inscrites à un quadrilatère ont leurs centres sur la droite qui joint les milieux des diagonales de ce quadrilatère. Donc le point O est à l'intersection des droites $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ qui correspondent aux quadrilatères ABXY et ABX′Y′.



Si l'angle donné ω tourne autour de son sommet P, ses deux côtés PX, PX′ décriront deux faisceaux homographiques. Les points de rencontre X, Y du côté PX avec AC et BC décrivent deux divisions homographiques; il suit de là que les faisceaux engendrés par BX et AY sont homographiques. Coupons ces deux faisceaux respectivement par les droites DF et EF joignant les milieux des côtés du triangle ABC; les points de rencontre ξ, η qui sont précisément les milieux des diagonales du quadrilatère ABCD, décriront encore deux divisions homographiques. Par suite, la droite $\xi\eta$ enveloppe une conique tangente aux droites DF, EF. On reconnaît immédiatement que la droite DE est aussi tangente à cette conique déterminée Γ qui est ainsi inscrite au triangle DEF. Effectivement, quand la droite PXY passe par le point C, les points X et Y se confondent avec le point C, de sorte que ξ vient en D et η en E; DE est donc bien une tangente à Γ. D'ailleurs il convient de remarquer que la droite $\xi\eta$ coupe DE précisément au milieu de la troisième diagonale du quadrilatère ABXY, et par conséquent le côté DE du triangle DEF doit être traité comme les deux autres.

Lorsque X vient en A, le point ξ se confond avec F, et η est alors le point de concours G des droites PA, EF; donc G est le point de contact de EF avec la conique Γ. Pour la même raison DF touche Γ au point de rencontre I de PB avec DF; le point de contact de DE est par suite déterminé et il se trouve au point de rencontre H des droites DE et PC.

Cela posé, il est évident que la conique Γ est aussi l'enveloppe des droites $\xi'\eta'$. D'autre part, les points ξ et ξ' tracent sur DF deux divisions homographiques; nous pouvons donc faire usage de ce

(*) Cette solution nous a été envoyée au mois de novembre.

théorème de Chasles (*Traité des sections coniques*, 175, corollaire) : *Si l'on a, sur une tangente fixe d'une conique, deux divisions homographiques, les tangentes menées par chaque couple de points homologues des deux divisions se coupent sur une conique qui a un double contact avec la proposée.* D'où il suit que :

Le lieu des centres des coniques inscrites au triangle ABC et vues du point fixe P sous un angle donné ω, est une conique S qui a un double contact avec une conique déterminée Γ. Cette dernière courbe est tangente, en des points que nous avons déterminés plus haut, aux droites joignant les milieux des côtés du triangle ABC.

Si l'angle ω est droit, les points ξ, ξ' tracent deux divisions en involution, et dans ce cas le point de concours de deux tangentes homologues $\xi\eta$, $\xi'\eta'$ décrit une droite. Le lieu du point O se réduit ainsi, dans ce cas, à une droite.

Faisons maintenant varier la grandeur de ω. La conique Γ reste invariable ; en outre, les faisceaux homographiques engendrés par les côtés PX et PX′ de l'angle ω ont toujours les mêmes rayons doubles, savoir les droites isotropes issues du point P. On conclut de là que les ponctuelles engendrées par ξ et ξ' ont toujours les mêmes points doubles imaginaires, quelle que soit la grandeur de ω. Nous pouvons maintenant faire usage d'un autre théorème de Chasles : *Quand deux divisions homographiques sont formées sur une tangente à une conique, si par chaque couple de points homologues des deux divisions, on mène des tangentes à la conique, les deux points de contact marqueront sur la courbe deux divisions homographiques, dont les points doubles seront les points de contact des tangentes issues des points doubles des deux divisions rectilignes* (Traité des sections coniques, 237).

On reconnaît aisément que les points doubles imaginaires des deux divisions homographiques sur la courbe sont les points de contact de la conique variable S et de la conique fixe Γ. Donc, en faisant varier la grandeur de l'angle ω, on obtient une infinité de coniques S dont chacune a un double contact imaginaire avec Γ, la corde des contacts étant toujours la même. Nous dirons donc que :

Toutes les coniques S que l'on obtient en faisant varier la grandeur de l'angle ω qui tourne autour du point fixe P, ont un double contact imaginaire avec une conique déterminée Γ ; la corde des contacts est toujours la même, quelle que soit la grandeur de ω. Cette droite représente aussi une conique ayant un double contact avec Γ ; elle correspond au cas où l'angle ω est droit.

On peut résoudre d'une manière analogue ce problème plus général : On donne un triangle ABC et deux faisceaux homographiques qui ont un centre commun P. Quel est le lieu des centres des coniques inscrites au triangle ABC et tangentes à deux rayons homologues des deux faisceaux. On trouve une conique ayant un double contact avec la conique Γ.

Dr O. Gutsche
(Breslau).

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1890).

49. — *Entre les coordonnées x, y d'un point A et les coordonnées u et v d'un point B, on établit les relations*

$$x = \frac{u^3 + \lambda u v^2}{u^2 + v^2}, \qquad y = \frac{v^3 + \lambda v u^2}{u^2 + v^2},$$

où λ est un nombre positif donné.

Après avoir déduit de ces relations l'équation qui relie les coefficients angulaires α, β des droites qui joignent l'origine aux points A, B, on montrera que, en général, à chaque point A correspondent trois positions du point B : ces points B_1, B_2, B_3 peuvent-ils être réels et distincts ? Où le point A doit-il se trouver pour qu'il en soit ainsi ? Sur quel lieu doit-il être situé pour que deux de ces points, B_2 et B_3, par exemple, soient confondus ? Si le point A décrit ce lieu, quels sont les lieux décrits par les points confondus B_2, B_3 et par le point B_1 ?

On a
$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{v^3 + \lambda v u^2}{u^3 + \lambda u v^2} = \frac{\beta^3 + \lambda\beta}{1 + \lambda\beta^2},$$
d'où
$$\beta^3 - \lambda\alpha\beta^2 + \lambda\beta - \alpha = 0. \qquad (1)$$

A chaque valeur de α correspondent trois valeurs de β; à chaque détermination de β correspond un seul système de valeurs de u et v données par les équations
$$v = \beta u, \qquad u = \frac{x(1 + \beta^2)}{1 + \lambda\beta^2}.$$

Ainsi, à chaque valeur de β correspond un seul point B; donc à chaque point A correspondent trois points B_1, B_2, B_3. Parmi ces derniers il y en a autant de réels qu'il y a de valeurs réelles de β.

Le discriminant de l'équation (1) est, à un facteur positif près, égal à
$$4\lambda^3\alpha^4 - (\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27)\alpha^2 + 4\lambda^3.$$

Désignons par Δ ce polynome bicarré et réciproque en α. Δ est nul quand le point A est sur l'une des quatre droites passant par l'origine et dont les coefficients angulaires vérifient l'équation
$$4\lambda^3\alpha^4 - (\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27)\alpha^2 + 4\lambda^3 = 0. \qquad (2)$$

On a
$$(\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27)^2 - 64\lambda^6 \equiv (\lambda^4 + 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 27)(\lambda^4 - 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 27).$$
Or
$$\lambda^4 + 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 27 \equiv (\lambda - 1)(\lambda + 3)^3;$$
donc
$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 18\lambda^2 - 27 \equiv (\lambda + 1)(\lambda - 3)^3,$$
de sorte que
$$(\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27)^2 - 64\lambda^6 \equiv (\lambda - 1)(\lambda - 3)^3(\lambda + 1)(\lambda + 3)^3.$$

Comme on suppose $\lambda > 0$, on voit que la réalité des racines de l'équation (2) dépend du signe de $(\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

Si l'on suppose $1 < \lambda < 3$, les racines sont imaginaires et par suite Δ est positif, de sorte que dans ce cas un seul point B est réel.

Supposons en second lieu que λ soit compris entre 0 et 1 ou qu'il soit plus grand que 3; les valeurs de α^2 fournies par l'équation (2) sont réelles; leur produit est égal à 1 et leur somme a le signe de $\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27$. Or l'équation $\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27 = 0$ a une seule racine positive qui est comprise entre 1 et 3; donc si l'on suppose $\lambda < 1$ la somme des racines est négative et par suite les quatre racines de l'équation (2) sont imaginaires.

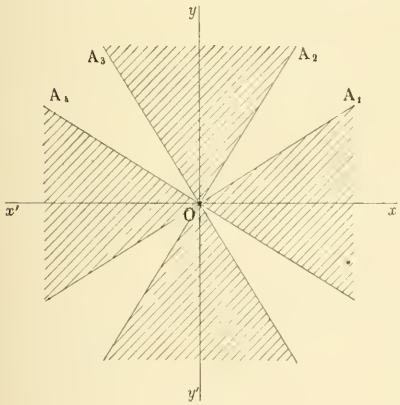


Fig. 1.

Si l'on suppose $\lambda > 3$ la somme des valeurs de α^2 est positive; ces valeurs sont donc toutes deux positives, de sorte que les quatre racines de l'équation (2) sont réelles. Par suite, si l'on trace quatre droites passant par l'origine et dont les coefficients angulaires soient égaux aux racines de l'équation (2), en remarquant que si α est l'une de ces racines, les quatre racines sont
$$\alpha, \qquad \frac{1}{\alpha}, \qquad -\alpha, \qquad -\frac{1}{\alpha},$$
on voit que ces quatre droites sont deux à deux symétriques par rapport aux axes et aux bissectrices des axes, de sorte que l'on obtient la figure 1.

Les droites OA_1 et OA_3 sont perpendiculaires, ainsi que les droites OA_2 et OA_4. Si $\lambda = 3$ ces droites se confondent avec les bissectrices des axes. Pour $\alpha = 0$, on a $\Delta > 0$; donc les régions couvertes de hachures correspondent à un seul point B réel, les autres donnent chacune trois points B réels.

Deux points B seront confondus lorsque le point A décrira l'une des quatre droites OA_1, OA_2, OA_3, OA_4. Désignons par B_2 et B_3 les deux points confondus, et par B_1 le point isolé.

Si l'on suppose que l'équation (1) ait une racine double β, en désignant par β_1 la racine simple, on aura

$$\beta_1 + 2\beta = \lambda\alpha, \qquad \beta^2 + 2\beta\beta_1 = \lambda, \qquad \beta^2\beta_1 = \alpha.$$

En éliminant β_1 et α on aura le lieu décrit par les points B_2 et B_3 confondus; en éliminant β et α on aura le lieu décrit par le point isolé B_1; on obtient immédiatement

$$(\beta^2 - \lambda)(\lambda\beta^2 - 1) + 4\beta^2 = 0$$

ou

$$\lambda\beta^4 - (\lambda^2 - 3)\beta^2 + \lambda = 0 \qquad (3)$$

$$4\lambda\beta_1^4 + [3 + 6\lambda^2 - \lambda^4]\beta_1^2 + 4\lambda = 0. \qquad (4)$$

Chacune de ces équations définit un faisceau de quatre droites disposées de la même façon que les droites OA.

Chacun de ces faisceaux est réel si $\lambda > 3$; imaginaire si $\lambda \leqslant 1$.

Quand $\lambda = 3$, on obtient, pour chacun d'eux, deux droites doubles confondues avec les deux bissectrices des axes.

Il convient encore de remarquer que si l'on donne une racine α de l'équation (2), la racine double β correspondante est déterminée par l'équation $\beta = \dfrac{\alpha(\lambda^2 - 9)}{2\lambda(\lambda\alpha^2 - 3)}$ et la racine simple $\beta_1 = \lambda\alpha - 2\beta$

[Ont résolu la question 49 : MM. Ch. H. (Chaumont); E. Baudran (Rouen); J. G. Darboux (lycée Louis-le Grand).]

Si l'on se donne le coefficient angulaire β de OB_1, on a

$$\frac{\beta^3 + \lambda\beta}{1 + \lambda\beta^2} = \alpha,$$

et si t désigne le coefficient angulaire de OB_2 ou de OB_3, on a encore

$$\frac{t^3 + \lambda t}{1 + \lambda t^2} = \alpha;$$

donc

$$\frac{t^3 + \lambda t}{1 + \lambda t^2} = \frac{\beta^3 + \lambda\beta}{1 + \lambda\beta^2}.$$

Après avoir supprimé la racine β, on obtient l'équation du second degré

$$t^2(1 + \lambda\beta^2) + \beta(1 - \lambda^2)t + \beta^2 + \lambda = 0.$$

Pour que OB_1 soit confondu avec OB_2 ou OB_3, il faut que cette équation admette encore la racine β, ce que donne l'équation

$$\beta^2(1 + \lambda\beta^2) + \beta^2(1 - \lambda^2) + \beta^2 + \lambda = 0$$

ou

$$\lambda\beta^4 + (3 - \lambda^2)\beta + \lambda = 0;$$

c'est l'équation (3).

Pour que OB_2 et OB_3 soient confondus, on doit avoir

$$\beta^2(1 - \lambda^2)^2 - 4(\beta^2 + \lambda)(1 + \lambda\beta^2) = 0;$$

c'est l'équation (4) correspondant aux points B isolés associés à deux points confondus.

Émile Borel.

Il reste encore à trouver les positions relatives des droites des faisceaux (α), (β), (β_1). Or chacune des équations (2), (3), (4) est bicarrée et réciproque; on a

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27}{4\lambda^3},$$

$$\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\lambda^2 - 3}{\lambda},$$

$$\beta_1^2 + \frac{1}{\beta_1^2} = \frac{\lambda^4 - 6\lambda^2 - 3}{4\lambda}.$$

Cela posé, quand x varie de 0 à 1, la fonction $x + \frac{1}{x}$ décroît de $+\infty$ à 2; donc, si l'on suppose x et y compris entre 0 et 1, l'inégalité

$$x + \frac{1}{x} > y + \frac{1}{y} \quad \text{entraîne} \quad x < y \quad \text{et inversement.}$$

Nous pouvons supposer α^2, β^2 et β_1^2 compris chacun entre 0 et 1.

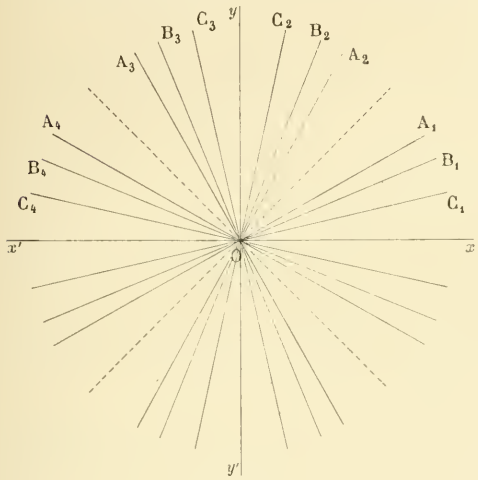


Fig. 2.

Considérons la différence

$$\frac{\lambda^4 - 6\lambda^2 - 3}{4\lambda} - \frac{\lambda^2 - 3}{\lambda},$$

qui a le même signe que $\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9$. Or l'identité

$$\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 9)$$

montre qu'en supposant $\lambda > 3$, on a

$$\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9 > 0;$$

donc on a $\beta_1^2 + \frac{1}{\beta_1^2} > \beta^2 + \frac{1}{\beta^2}$,

et par suite $\beta_1^2 < \beta^2$.

Comparons maintenant $\beta^2 + \frac{1}{\beta^2}$ et $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$; on a

$$\frac{\lambda^2 - 3}{\lambda} - \frac{\lambda^4 + 18\lambda^2 - 27}{4\lambda^3} = \frac{3\lambda^4 - 30\lambda^2 + 27}{4\lambda^3}$$

$$= \frac{3(\lambda^4 - 10\lambda^2 + 9)}{4\lambda^3};$$

donc, à cause de l'hypothèse $\lambda > 3$, cette différence est positive, et par suite

$$\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} > \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2},$$

donc

$$\beta^2 < \alpha^2;$$

on a ainsi

$$\beta_1^2 < \beta^2 < \alpha^2;$$

donc en représentant par OB_1, OB_2, OB_3, OB_4 les droites lieux des points B confondus, par OC_1, OC_2, OC_3, OC_4 les droites lieux des points B isolés, ces droites sont disposées comme sur la figure 2.

---

50. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on prend sur l'axe des* x *un point fixe* A, *sur l'axe des* y *un point fixe* B, *et l'on mène par le point* O *une parallèle à la droite* AB. *On considère un système de trois cercles assujettis à avoir même axe radical et à être tangents, le premier en* A *à l'axe des* x, *le second en* B *à l'axe des* y, *le troisième en* O *à la parallèle à* AB.

Démontrer que l'axe radical des trois cercles passe par un point fixe.

Trouver le lieu des points communs à ces trois cercles: on indiquera quelle est en général la forme de cette courbe, et l'on examinera en particulier le cas où l'angle A *du triangle* OAB *est égal à* $\frac{\pi}{6}$.

Les cercles tangents respectivement en A à l'axe des x et en B à l'axe des y ont pour équations

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y + a^2 = 0, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2\mu x - 2by + b^2 = 0, \qquad (2)$$

en supposant OA $= a$, OB $= b$.

Le cercle passant par les points communs aux cercles représentés par (1) et (2) et passant par l'origine est défini par l'équation

$$b^2(x^2 + y^2 - 2ax - 2\lambda y) - a^2(x^2 + y^2 - 2\mu x - 2by) = 0.$$

La tangente à l'origine à ce cercle sera parallèle à AB si les paramètres λ et μ sont liés par l'équation

$$\lambda b^3 + \mu a^3 - 2a^2b^2 = 0. \qquad (3)$$

L'axe radical des cercles (1) et (2) a pour équation

$$2(a - \mu)x + 2(\lambda - b)y + b^2 - a^2 = 0;$$

l'équation (3) exprime que cette droite passe par un point fixe; en écrivant la condition trouvée de cette manière :

$$(\mu - a)a^3 + (\lambda - b)b^3 - (a^2 + b^2)^2 = 0,$$

on voit immédiatement que ce point fixe a pour coordonnées

$$x = \frac{a^3}{2(a^2 - b^2)}, \qquad y = \frac{-b^3}{2(a^2 - b^2)}.$$

2° Pour avoir l'équation du lieu des points communs aux cercles considérés, il suffit d'éliminer λ et μ entre les équations (1), (2) et (3). On trouve ainsi

$$(x^2 + y^2)(b^3x + a^3y) - 2ab(bx + ay)^2 + a^2b^2(bx + ay) = 0.$$

Ce lieu est une cubique circulaire ayant à l'origine un point d'inflexion pour lequel la tangente est parallèle à AB ; cette courbe possède une asymptote réelle CD, ayant pour équation

$$b^3x + a^3y = \frac{2a^3b^3(a^2 - b^2)^2}{a^6 + b^6}.$$

Construction de la courbe. — En posant $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$ et supprimant le facteur ρ, l'équation de la courbe devient

$$\rho^2(b^3 \cos \omega + a^3 \sin \omega) - 2ab\rho(b \cos \omega + a \sin \omega)^2 + a^2b^2(b \cos \omega + a \sin \omega) = 0. \qquad (4)$$

On voit que cette équation ne change pas quand on change ω en $\pi + \omega$ et ρ en $-\rho$; on aura donc toute la courbe en faisant varier ω de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

En supposant $a \neq b$, on peut évidemment supposer $a > b > 0$.

La condition de réalité des racines de l'équation (4) se met aisément sous la forme

$$\sin \omega \cos \omega(b \cos \omega + a \sin \omega)[a(3b^2 - a^2) \cos \omega + b(3a^2 - b^2) \sin \omega] \geqslant 0,$$

ou, en posant

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{b}{a}, \qquad \operatorname{tg} \beta = -\frac{a}{b} \cdot \frac{3b^2 - a^2}{3a^2 - b^2},$$

$$\operatorname{tg} \omega(\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \beta) \geqslant 0. \qquad (5)$$

Pour fixer les idées, nous supposerons les angles α et β compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Il y a évidemment trois cas à distinguer.

1er cas. $3b^2 - a^2 > 0$. On a $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < 0$; si l'on mène les droites OK et OL ayant pour coefficients angulaires $\operatorname{tg} \alpha$ et $\operatorname{tg} \beta$, on voit que OL est dans l'angle KOx *(fig. 1)*. Pour $\omega = \frac{\pi}{4}$ le poly-

nome (5) en tg ω est positif; cette remarque détermine immédiatement des régions (couvertes de hachures sur la *fig. 1*) dans lesquelles il n'y a aucun point de la courbe. Le produit des racines est égal à

$$\frac{a^2b^2(b\cos\omega + a\sin\omega)}{b^3\cos\omega + a^3\sin\omega} \qquad \text{ou} \qquad b^2\,\frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}^3\alpha}.$$

Le coefficient angulaire de l'asymptote CD est précisément $\operatorname{tg}^3\alpha$; on a $\operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}^3\alpha$, car cette inégalité revient à celle-ci : $a^4(3b^2 - a^2) - b^4(3a^2 - b^2) < 0$,

ce qui se réduit à $3a^2b^2 - (a^4 + a^2b^2 + b^4) < 0$ ou $-(a^2 - b^2)^2 < 0$.

La parallèle OH à l'asymptote passe donc dans l'angle KOL. On reconnaît immédiatement que

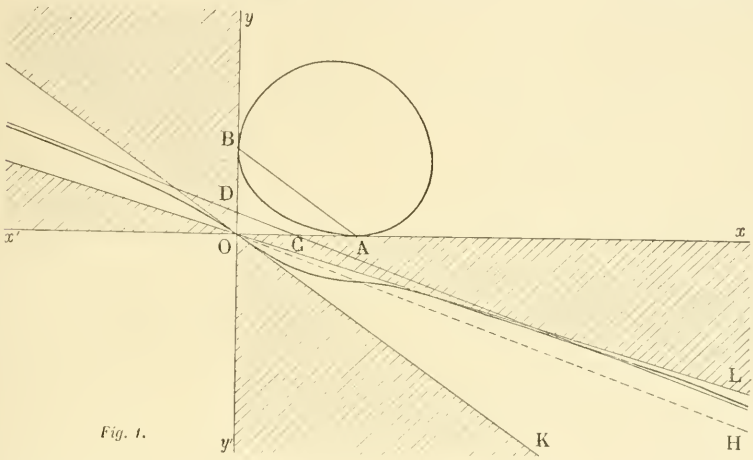


Fig. 1.

dans l'angle KOH le produit des valeurs de ρ est négatif; quand $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}^3\alpha$ une des racines devient infinie et change de signe, et quand $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\beta$ les deux racines deviennent égales. Pour toutes les valeurs positives de tg ω les racines de l'équation (4) sont réelles et positives; on en conclut que la courbe a la forme représentée par la figure 1.

2e Cas. $3b^2 - a^2 < 0$. Dans ce cas

$$\alpha < 0 < \beta < \frac{\pi}{2};$$

une discussion analogue à la précédente conduit à la forme représentée sur la figure 2.

3e Cas. $3b^2 - a^2 = 0$. Dans ce cas l'angle OAB $= \frac{\pi}{6}$; on a $\beta = 0$.

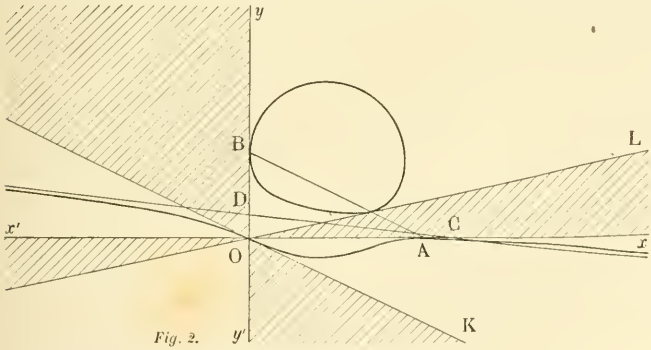


Fig. 2.

La condition de réalité des racines s'exprime ainsi :

$$\sin^2\omega\cos\omega(b\cos\omega + a\sin\omega) \geqslant 0.$$

Quand ω traverse la valeur 0, les racines deviennent égales, mais elles restent réelles tant que $b \cos \omega + a \sin \omega$ reste positif, c'est-à-dire tant que ω est compris entre α et $+ \frac{\pi}{2}$. On en conclut que le point A est un point double et que la courbe est unicursale. Si l'on transporte l'origine en A en posant $x = a + X$, $y = Y$, on trouve pour l'ensemble des termes du second degré

$$b^4 \sqrt{3}\,(X^2 - 2\sqrt{3}\,XY - 3Y^2);$$

le point A est donc un nœud à tangentes réelles, et la courbe a la forme représentée par la figure 3.

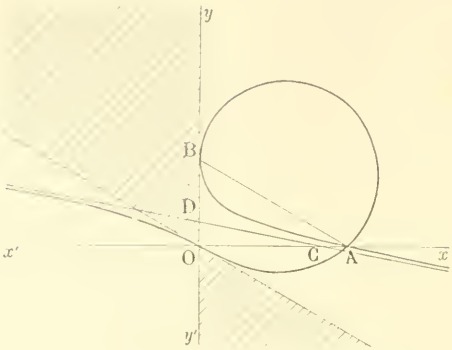


Fig. 3.

Cas particulier. — Quand $a = b$, l'équation se décompose en $x + y = 0$ et

$$x^2 + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0;$$

le lieu se décompose donc en une droite, la bissectrice de $x'Oy$ et un cercle.

E. Baudran (Rouen).

M. Barbel (Paris) nous a envoyé une solution analogue, très soignée. Il pose $y = tx$; la discussion est alors évidemment la même qu'avec des coordonnées polaires.

[Autres solutions : MM. André Durand (Paris ; Lecoquierre (Rouen) ; Jossinet (Troyes).]

ALGÈBRE

23. — *On désigne par* x *et* y *les distances* AM, BM *de deux points* A *et* B *à un point* M *pris arbitrairement sur une droite* D. *On demande de déterminer les maximum et minimum du rapport* $\frac{y}{x}$.

(École des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, 1890.)

Prenons pour axe des x la droite AB et pour axe des y une perpendiculaire à AB en son milieu. Soient a et $-a$ les abscisses des points A et B, et $y = mx + p$ l'équation de la droite D. Soit $M(x, y)$ un point quelconque de la droite D; le carré du rapport $\frac{BM}{AM}$, que nous désignerons par z, peut s'écrire

$$z = \frac{y^2 + (x + a)^2}{y^2 + (x - a)^2},$$

ou

$$z = \frac{(mx + p)^2 + (x + a)^2}{(mx + p)^2 + (x - a)^2} = 1 + \frac{4ax}{(mx + p)^2 + (x - a)^2}.$$

Tout revient à étudier cette fonction quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Elle est continue dans tout l'intervalle, excepté si le dénominateur s'annule, ce qui ne peut avoir lieu que si la droite D passe par le point A. Nous examinerons ce cas particulier tout à l'heure.

En prenant la dérivée on obtient, après réduction,

$$z' = \frac{4a[p^2 + a^2 - (1 + m^2)x^2]}{[(mx + p)^2 + (x - a)^2]^2}.$$

Le numérateur a deux racines réelles, $\pm\sqrt{\frac{p^2 + a^2}{1 + m^2}}$; on en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{p^2+a^2}{1+m^2}}$		$+\sqrt{\frac{p^2+a^2}{1+m^2}}$		$+\infty$
z'		$-$	0	$+$	0	$-$	
z	1	décroît	min.	croît	max.	décroît	1

On obtient aisément les valeurs du maximum et du minimum.

Si la droite D passe par le point A, $p = -ma$, et les valeurs de z et de z' deviennent

$$z = \frac{m^2(x - a)^2 + (x + a)^2}{(m^2 + 1)(x - a)^2}, \qquad z' = \frac{-4a(x + a)}{(m^2 + 1)(x - a)^3}.$$

d'où le tableau :

x	$-\infty$		$-a$		$+a$		$+\infty$
z'		$-$	0	$+$	$+\infty$ | $-\infty$	$+$	
z	1	décroît	min.	croît	$+\infty$	décroît	1

Il n'y a plus à proprement parler de maximum.

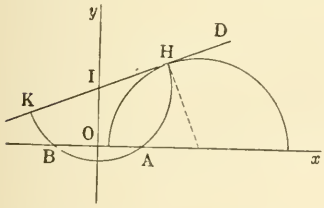
Si la droite D est perpendiculaire à AB, et a pour abscisse b, en désignant par y l'ordonnée du point M, on a

$$z = \frac{y^2 + (b + a)^2}{y^2 + (b - a)^2} = 1 + \frac{4ab}{y^2 + (b - a)^2}.$$

Tout revient à l'étude du trinome $y^2 + (b - a)^2$.

On en déduit sans peine la variation de z. Si $b > 0$, z a un maximum; si $b < 0$, z a un minimum, et dans les deux cas pour $y = 0$. Pour $b = a$, c'est-à-dire dans le cas où la droite D passe par le point A, il n'y a plus de maximum.

Remarque. — On peut obtenir géométriquement dans le cas général les points de la droite D qui correspondent au maximum et au minimum.



Si l'on veut déterminer un point M de la droite pour lequel le rapport $\frac{BM}{AM}$ soit égal à un nombre donné k, on prend sur la droite AB les points C et C′ conjugués harmoniques par rapport à A et B et tels que les valeurs absolues des rapports $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{BC'}{AC'}$ soient égales à k. Le cercle décrit sur CC′ comme diamètre coupe la droite D aux points cherchés. Pour que ce problème soit possible, il faut que le cercle décrit sur CC′ comme diamètre rencontre la droite D en des points réels. On aura donc les cercles limites en construisant les cercles tangents à la droite D, ayant leurs centres sur AB et conjugués par rapport à A et B; et les points de contact de ces cercles seront les points correspondant au maximum et au minimum.

Imaginons l'un de ces cercles, tangent en H à la droite D; le cercle qui passe par les points A, B et H doit couper le cercle précédent orthogonalement, puisque la droite AB, diamètre du premier

cercle, est coupée harmoniquement par le deuxième; par suite la droite D est diamètre du cercle ABH; le centre de ce cercle est en I, à l'intersection de D et de Oy. En conséquence, on aura les points de contact des cercles limites, c'est-à-dire les points correspondant au maximum et au minimum, en prenant l'intersection de la droite D avec le cercle de centre I et de rayon IA. On a deux points de rencontre H et K.

On déduit de là sans difficulté la variation du rapport $\frac{BM}{AM}$ quand le point M décrit la droite. Au point K correspond un minimum et au point H un maximum.

E. Jossinet, lycée de Troyes.

[Ont résolu la même question : MM. Baudran (lycée de Rouen); Marey-Monge (lycée Louis-le-Grand); Ronzel (lycée de Clermont.)]

---

53. — *Trouver la limite de* $(x+1)^{1+\frac{1}{x+1}} - x^{1+\frac{1}{x}}$ *quand* x *croît indéfiniment.*

Si l'on pose $f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$, ou a $f(x+1) - f(x) = f'(\xi)$, ξ désignant un nombre compris entre x et $x+1$. Or

$$f'(\xi) = \xi^{\frac{1}{\xi}}\left[1 + \frac{1}{\xi} - \frac{L\xi}{\xi}\right].$$

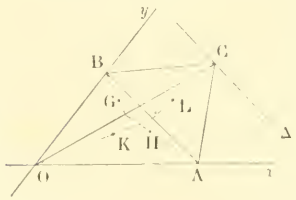
Si x augmente indéfiniment, il en est de même de ξ; or $\xi^{\frac{1}{\xi}}$ a pour limite 1, $\frac{L\xi}{\xi}$ a pour limite 0; donc l'expression considérée, égale à $f(x+1) - f(x)$, a pour limite 1 quand x croît indéfiniment.

[Autres solutions par MM. Auzeram et J. Vigneaux, lycée de Toulouse; Dupuy (Bordeaux); Hesson, lycée de Nancy; L. Perrée (Condorcet).]

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

42. — *Trois sommets d'un quadrilatère sont fixes, le quatrième décrit une droite. Trouver le lieu du centre de gravité du quadrilatère.*

Soient O, A, B les trois sommets fixes; prenons comme axes OA et OB, et soient a l'abscisse du point A, b l'ordonnée du point B. Soit, en outre, $ux + vy + w = 0$, l'équation de la droite donnée Δ, que doit décrire le quatrième sommet C du quadrilatère. Je puis définir ce point C en donnant l'équation, $y = mx$, de la droite OC; de telle sorte que ses coordonnées sont



$$x = -\frac{w}{u + vm}, \qquad y = \frac{-wm}{u + vm}.$$

On sait que le centre de gravité du quadrilatère OACB est à l'intersection de la droite qui joint le centre de gravité G du triangle OBC au centre de gravité H du triangle OAC et de celle qui joint les centres de gravité K et L des triangles OAB et ABC.

La droite KL est parallèle à OC et passe par le point K; son équation est donc

$$y - \frac{b}{3} = m\left(x - \frac{a}{3}\right). \qquad (1)$$

La droite GH est parallèle à AB et passe par le point G de coordonnées $-\frac{w}{3(u+vm)}$ et $\frac{b}{3}-\frac{wm}{3(u+vm)}$; son équation est donc

$$y-\frac{b}{3}+\frac{wm}{3(u+vm)}=-\frac{b}{a}\left[x+\frac{w}{3(u+vm)}\right]. \qquad (2)$$

Éliminant m entre (1) et (2), on a l'équation du lieu. Pour simplifier les calculs, transportons l'origine au point K $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$. On tire de la première équation $m=\frac{y}{x}$, et remplaçant dans la deuxième, il vient

$$y+\frac{wy}{3(ux+vy)}=-\frac{b}{a}\left[x+\frac{a}{3}+\frac{wx}{3(ux+vy)}\right],$$

ou
$$(ux+vy)(bx+ay)+\frac{w}{3}(bx+ay)+\frac{ab}{3}(ux+vy)=0,$$

ou encore
$$\left(ux+vy+\frac{w}{3}\right)\left(bx+ay+\frac{ab}{3}\right)-\frac{abw}{9}=0.$$

Le lieu est donc une hyperbole qui passe par l'origine K et qui a pour asymptotes les deux droites

$$bx+ay+\frac{ab}{3}=0, \qquad ux+vy+\frac{w}{3}=0.$$

La première est parallèle à AB et rencontre OA au point A′ tel que $OA'=\frac{OA}{3}$.

La deuxième est parallèle à Δ; on la construit aisément en remarquant qu'elle rencontre le nouvel axe des x en un point dont l'abscisse est le $\frac{1}{3}$ de l'abscisse du point de rencontre de Δ et de Ox.

La courbe se trouve ainsi bien déterminée par ses asymptotes et un point.

Si la droite Δ est parallèle à AB, on peut poser $u=b$, $v=a$; l'équation du lieu peut s'écrire

$$(bx+ay)\left[bx+ay+\frac{ab+w}{3}\right]=0;$$

elle représente deux droites parallèles. L'une d'elles, $bx+ay=0$, ne peut convenir; car, pour tout point de cette droite, la solution commune aux équations (1) et (2) est $m=-\frac{b}{a}$; le point C est alors à l'infini sur Δ et les deux droites (1) et (2) sont confondues.

Le lieu se réduit donc à la droite

$$bx+ay+\frac{ab+w}{3}=0,$$

qui se construit facilement, et qu'on peut trouver par de simples considérations géométriques.

Remarque. — Quand le point C décrit la droite Δ, le quadrilatère OACB peut prendre différentes formes. Il importe d'observer que le lieu trouvé contient les centres de gravité des quadrilatères OACB, dans lesquels AB est une diagonale. Le point C peut occuper trois positions principales par rapport au triangle OAB, représentées par les trois figures ci-contre. Dans les deux premières, le point de rencontre des droites GH et KL est le centre de

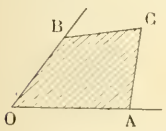


Fig. 1.

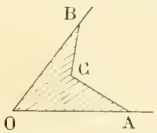


Fig. 2.

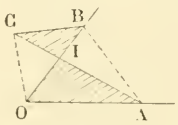


Fig. 3.

gravité de l'aire ombrée. Tandis que dans la figure (3), ce point de rencontre est le centre de gravité de l'aire obtenue en prenant la différence des aires des triangles IOA et IBC. On pourrait déterminer sans peine sur le lieu trouvé les centres de gravité correspondant à ces trois cas de figure.

A. Luc, lycée Condorcet.

[Solutions analogues par MM. G. Cuny (école Saint-Sigisbert, à Nancy); Descombes, à Annecy; Jessinet (Troyes); L. Perrée (Condorcet).]

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École polytechnique (1890). — (*Suite.*)

45. — En un point d'une hyperbole équilatère on mène la normale, et sur la portion de cette droite comprise entre le pied et une asymptote, on décrit un cercle comme diamètre. Lieu des centres. Lieu des points de concours des tangentes communes au cercle et à l'hyperbole.

46. — Lieu des sommets des hyperboles équilatères tangentes à une droite et ayant un foyer donné.

47. — Lieu du point milieu du segment intercepté par les deux asymptotes sur une normale à une hyperbole équilatère.

48. — Lieu du point de concours des tangentes communes à une ellipse et à une parabole qui a son sommet fixe sur l'ellipse et lui est tangente en ce point.

49. — Lieu des sommets des paraboles passant par les quatre points d'intersection d'une ellipse avec deux droites rectangulaires passant par le foyer de l'ellipse.

50. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une ellipse sur les directrices des paraboles tangentes à l'ellipse et passant par les deux foyers.

51. — Lieu des centres des ellipses dont les sommets A, A' décrivent deux cercles concentriques, et les sommets B et B' deux droites données.

52. — Lieu des foyers des ellipses d'aire constante, ayant un sommet donné et tangentes à une droite donnée.

53. Lieu des sommets des hyperboles équilatères passant par les quatre extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse.

54. On donne une parabole de foyer F. Une ellipse d'axe focal constant et donné a un foyer en F et touche constamment la parabole. Lieu du centre et du second foyer.

55. — Lieu du point obtenu en portant sur la normale à une ellipse une longueur moyenne proportionnelle entre les rayons vecteurs du pied de la normale. Démontrer géométriquement que le lieu est un cercle.

56. — Lieu du centre des cercles tangents à une ellipse et à deux tangentes à la courbe, ces deux tangentes se déplaçant en restant rectangulaires.

57. — Lieu du centre des hyperboles équilatères tangentes à une droite fixe, passant par le centre d'une ellipse et par deux points de cette courbe situés sur deux diamètres conjugués.

58. — Lieu des sommets des paraboles ayant un foyer donné et tangentes à une droite donnée.

59. — D'un point donné comme centre, on décrit des cercles qui coupent une ellipse en quatre points. Lieu des sommets des hyperboles équilatères qui passent par ces quatre points.

60. — On donne une droite et des points en nombre quelconque. Sur la droite, à partir d'un point fixe, on porte des longueurs proportionnelles à la somme des carrés des distances de chaque point à la droite. Lieu des extrémités des segments ainsi obtenus quand la droite tourne autour d'un point fixe.

61. — Par un point M extérieur à une conique donnée, on mène deux cordes MAB, MCD, parallèles à deux diamètres conjugués, on prend sur AB un point P et sur CD un point Q tels que $MP^2 = MA \times MB$, $MQ^2 = MC \times MD$. Calculer la surface du parallélogramme construit sur MP et MQ.

62. — Une hyperbole a pour asymptote la droite $ax + by + c = 0$ et passe par les trois points (x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3). Trouver l'équation de la courbe et de la seconde asymptote.

63. — Équation générale des coniques ayant pour asymptote la droite $2y - 3x = 0$ et pour foyer le point (α, β);

64. — Lieu du centre d'une ellipse d'aire constante ayant un foyer fixe et tangente à une droite donnée.

65. — Lieu des pôles d'une droite fixe par rapport à une conique de grandeur constante qui tourne autour de son centre.

66. — On donne un sommet et une directrice d'une elllipse variable. Lieu des extrémités des diamètres conjugués égaux.

67. — Lieu des centres des coniques d'aire constante qui ont un sommet fixe et sont tangentes à une droite.

68. — Lieu du centre du cercle inscrit dans le triangle formé par deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse et la droite qui joint leurs extrémités.

69. — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse et à son grand axe.

70. — Lieu des points d'où l'on peut mener des tangentes égales à deux coniques.

71. — Lieu des points dont les polaires par rapport à une ellipse sont normales à la courbe.

72. — Lieu des centres des cercles tangents à une ellipse donnée et à deux diamètres conjugués.

73. — On donne deux droites rectangulaires et un point fixe. Par ce point, on mène deux sécantes, l'une fixe, l'autre mobile. Trouver le lieu des points d'intersection des axes des paraboles passant par les quatre points de rencontre des sécantes avec les droites données.

74. — Étant donnée une conique passant par l'origine, on considère deux sécantes issues de l'origine et respectivement parallèles à deux diamètres conjugués de la conique. Chacune de ces sécantes coupe la conique en un second point. Par chacun de ces points on élève une perpendiculaire à la sécante correspondante. Lieu du point de rencontre de ces perpendiculaires.

75. — Dans une conique, on donne un point et sa polaire; combien cela fait-il de conditions? On donne un second point et sa polaire, puis enfin un point de la courbe. Démontrer que la conique est bien déterminée. La construire point par point.

76. — On donne un point M, qui décrit un lieu défini par la relation $f(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = 0$ entre les distances ρ_1, ρ_2, ρ_3 de ce point M à trois pôles fixes O_1, O_2, O_3. Trouver la tangente au point M décrite par le point.

Application : $\rho_1 + \rho_2 = 2a, \qquad \rho_1^2 + \rho_2^2 = 4a^2.$

77. — On donne un point sur le petit axe d'une ellipse; par ce point on mène une corde variable. Trouver le lieu du point de concours des normales aux extrémités de ces cordes. Solution géométrique.

78. — Lieu des projections du sommet d'une parabole sur toutes les normales.

79. — Étudier la conique $x = \dfrac{3t+2}{t^2}, \qquad y = \dfrac{t+1}{t}.$

C'est une parabole — Sommet — Paramètre.

80. — Écrire que la droite $ax + by + c = 0$ est directrice de la conique $f(x, y) = 0$.

81. — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$; on mène une corde quelconque OA, on projette A en B sur Oy, et B en M sur OA. Lieu du point M. Solution géométrique.

III. — Géométrie analytique a trois dimensions.

82. — On donne les extrémités A et A′ de deux diamètres conjugués dans l'ellipse de gorge d'un hyperboloïde à une nappe. Par le point A, on fait passer la génératrice de système λ et par A′ la génératrice du système μ. Ces deux génératrices se coupent en un point M dont on demande le lieu.

83. — On considère un cône droit à base elliptique. On mène une génératrice quelconque SB et par le point B′, diamétralement opposé à B, on mène la tangente à la directrice. Lieu des pieds des perpendiculaires communes aux deux droites SB et B′T.

84. — Lieu des sommets des sections faites dans un ellipsoïde par des plans passant par une droite donnée.

85. — Équation générale des quadriques passant par les côtés d'un quadrilatère gauche. Génératrices rectilignes. — Combien a-t-on de paraboloïdes? Leur nature.

86. — Nature de la surface $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)y^2 - 3xy - 4yz + \mu x - 2y + 2\mu^2 + 3 = 0.$

87. — Équation d'une surface de révolution ayant pour axe Oz et tangente à une surface donnée $f(x, y, z) = 0$, en tous les points d'une courbe.

88. — Équation de la surface engendrée par une droite variable assujettie à rencontrer trois droites

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}. \qquad \frac{x - x_2}{a_2} = \ldots \qquad \frac{x - x_3}{a_3} = \ldots$$

89. — Lieu des sommets des sections de l'ellipsoïde $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ par les plans tangents à un cylindre de révolution d'axe $\dfrac{x}{\alpha} = \dfrac{y}{\beta} = \dfrac{z}{\gamma}$ et de rayon R.

90. — On donne l'hyperboloïde à une nappe $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Soit M un point de l'ellipse de gorge, MG une génératrice passant par ce point. On considère le diamètre ON conjugué de OM dans l'ellipse de gorge et la génératrice NG′ de même système que MG. Lieu de la perpendiculaire commune à ces deux génératrices.

91. — Lieu des sommets des paraboloïdes de révolution contenant une ellipse donnée.

92. — On donne un cône du second degré et une sphère. Par une génératrice quelconque du cône on mène deux plans tangents à la sphère, et on demande le lieu engendré par la perpendiculaire commune à la génératrice du cône et à la droite joignant les points de contact des plans tangents.

93. — Trouver l'équation d'une surface de révolution dont l'axe est $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$, et dont la méridienne a pour équation $\varphi(X, Y) = 0$ dans un plan passant par l'axe, les axes de coordonnées OX et OY étant l'axe de la surface et la perpendiculaire menée par le point x_0, y_0, z_0.

94. — Dans la discussion des quadriques on étudie les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \qquad H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Que signifient les conditions $\Delta > 0$ et $H = 0$?

95. — On donne un ellipsoïde, on mène de l'un de ses sommets des perpendiculaires sur tous les plans tangents à la surface. Par l'origine des coordonnées, on mène des droites égales et parallèles à ces perpendiculaires. Lieu des points ainsi obtenus.

96. — Étant donné l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, trouver le lieu des projections de la droite

$$\frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu}$$

sur tous les plans tangents à l'ellipsoïde aux points de son intersection avec le plan $Ax + By + Cz = 0$.

97. — Équations des coniques, communes à deux cônes ayant pour sommets (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma)$ et circonscrits à une même quadrique.

98. — Condition pour que l'équation générale du second degré représente un cylindre ayant pour section droite une hyperbole équilatère.

99. — Lieu du centre des quadriques contenant une conique donnée et ayant un sommet en un point donné.

100. — Équation de l'ensemble des plans tangents à une quadrique aux points où elle est coupée par une droite donnée.

101. — On donne trois axes rectangulaires; un plan mobile détache dans ce trièdre un tétraèdre de volume constant. Lieu des centres des sphères inscrites dans le tétraèdre.

102. — Nature de la courbe

$$x = \frac{1 + t}{1 - t}, \qquad y = \frac{1}{1 - t^2}, \qquad z = \frac{t}{1 + t}.$$

Plan de la courbe. — Asymptotes. — Axes. — Foyers.

103. — On donne le cylindre $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$. Trouver les diamètres conjugués égaux de la conique section.

104. — On donne deux plans fixes et un point dans chacun de ces plans. Par ces deux points et dans les plans donnés on fait passer deux droites qui font entre elles un angle constant. Lieu des pieds des perpendiculaires communes à ces droites.

105. — Lieu des centres des quadriques tangentes à sept plans

106. — Condition pour que les quatre droites $\frac{x - x_i}{a_i} = \frac{y - y_i}{b_i} = \frac{z - z_i}{c_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ soient des génératrices de même système d'un hyperboloïde.

107. — Lieu des droites rencontrant trois cercles situés dans les trois plans de coordonnnées.

108. — Sur chaque génératrice d'un hyperboloïde, à partir de son point de rencontre avec l'ellipse de gorge, on porte une longueur constante. Lieu des points ainsi obtenus.

109. — Trouver l'équation du cylindre, de génératrices parallèles à la direction l, m, n, circonscrit à la surface

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3.$$

110 — Lieu des points d'une quadrique où le plan tangent fait avec Ox un angle α.

111. — Lieu des foyers des sections obtenues en coupant la quadrique $z = xy$ par des plans passant par la droite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

112. — Un triangle d'aire constante se déplace en ayant ses sommets sur les trois axes; lieu du pied de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur le plan du triangle.

113. — Équation d'un cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice une hélice tracée sur un cylindre droit d'axe Oz. Section du cône par le plan $z = h$.

114. — Lieu des axes des paraboloïdes équilatères passant par deux droites.

115. — Lieu des symétriques d'un point par rapport aux génératrices d'un cône de révolution.

116. — Lieu des foyers des sections faites dans une quadrique par des plans contenant une normale fixe.

117. — Lieu des centres des quadriques dont on donne un plan tangent et deux sommets n'appartenant pas au même axe.

118. — Lieu des sommets des sections faites dans le paraboloïde $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$ par des plans tangents à un cône de révolution qui a son sommet à l'origine et pour axe Oz.

119. — On donne un sommet, une génératrice et un point d'une quadrique. Lieu du centre.

120. — Lieu des ombilics des surfaces $x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz - 2bzx - 2cxy = 1$ avec la condition $abc = 1$.

121. — Lieu des centres des quadriques de révolution contenant une ellipse donnée $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $z = 0$. A priori, est-ce une ligne ou une surface?

122. — Lieu des sommets des surfaces ayant un ombilic et une section circulaire parallèle donnés.

123. — Par un point A on mène des plans coupant deux plans donnés suivant des droites rectangulaires. Lieu des perpendiculaires élevées au point A à tous ces plans.

124. — Construire un cylindre hyperbolique connaissant un plan asymptote et quatre points.

125. — Déterminer le contour apparent sur le plan des xy d'un hyperboloïde de révolution ayant pour axe la droite $y - mz = 0$, $x = 0$, et pour génératrice $x = y = z - 1$.

126. — Lieu des centres des quadriques passant par une conique donnée et ayant un sommet donné.

127. — Étant données les deux quadriques

$$2x^2 + z^2 - 8xy + 4zx - 6x = 0, \quad 3y^2 + 4z^2 - 2zx - 1 = 0,$$

trouver les points doubles de la projection de l'intersection sur le plan des xy.

128. — Lieu des projections d'une droite fixe sur les plans normaux à la courbe définie par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad z^2 = 2xy.$$

129. — On donne trois droites quelconques dans l'espace et on prend leurs points de rencontre avec un plan parallèle à un plan fixe. Lieu des centres de gravité, des orthocentres des triangles ainsi obtenus.

130. — Lieu des ombilics des paraboloïdes passant par une conique donnée et un point donné.

131. — Lieu géométrique des points dont la distance à leur plan polaire par rapport à une quadrique est constante. Intersection du lieu avec la surface.

132. — Lieu des axes des cylindres de révolution passant par quatre points d'un plan.

133. — On donne dans l'espace une droite passant par un point fixe A et une série de points M, M′, etc. On demande le lieu des points obtenus en portant, à partir du point A, une longueur $l = \frac{k}{d} + \frac{k'}{d'} \ldots$, d, d', etc., étant les distances des points M, M′, etc., à la droite.

134. — Que représente l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos\lambda - 2zx \cos\mu - 2xy \cos\nu = 1 \,?$$

$\lambda + \mu + \nu = \pi$.

135. — On donne une quadrique $f(x, y, z) = 0$. Par un point O de l'espace, on mène trois droites rectangulaires; soient M et M′ les points d'intersection de l'une d'elles avec la surface. On prend le point N tel que $\overline{ON}^2 = OM \times OM'$, et on fait la somme des trois quantités telles que $\frac{1}{\overline{ON}^2}$. Expression de cette somme.

136. — Une droite de longueur constante se déplace de façon que ses extrémités décrivent deux droites données qui ne se rencontrent pas. On projette orthogonalement la droite mobile sur un plan fixe P. Lieu de la projection sur cette projection de la droite mobile d'un point fixe du plan P.

137. — Trouver la direction des axes de la section du paraboloïde $z = xy$ par le plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

138. — Surface de révolution engendrée par une hyperbole équilatère tournant autour d'une de ses asymptotes. Courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction $\alpha\beta\gamma$. Projection sur le plan des xy. Équation en coordonnées polaires.

139. — Lieu des normales menées à un ellipsoïde par les différents points d'une droite donnée.

140. — Trouver l'équation de l'ellipsoïde ayant pour centre l'origine des coordonnées, ayant pour plans cycliques les plans $x + y - z = 0$, $x - y + z = 0$ passant par le point $(x = 0, y = 0, z = 1)$ et tangent au plan $y = 1$.

141. — Démontrer que la condition pour que trois plans se coupent sur une quadrique peut se mettre sous forme d'un déterminant obtenu en bordant le discriminant du premier membre de cette quadrique avec les coefficients des trois équations des plans et des zéros.

142. — On donne les extrémités de trois diamètres conjugués. Combien cela fait-il de conditions pour une quadrique?

143. — Lieu des normales issues d'un point à une série d'ellipsoïdes homothétiques et concentriques.

144. — Lieu des normales à un ellipsoïde en tous les points d'une section plane. Montrer que la surface trouvée peut être engendrée par une conique qui se déplace en se déformant.

145. — Lieu du pied de la perpendiculaire commune à l'axe d'un paraboloïde hyperbolique et à une génératrice quelconque de la surface.

146. — Combien de conditions donne-t-on en assujettissant une quadrique à contenir une conique donnée, à être inscrite dans un cône donné? Existe-t-il une corrélation entre ces deux questions?

CONCOURS DE 1890 (*Suite*).

BOURSES DE LICENCE

Licence ès sciences physiques.

I. — Champ d'une lunette astronomique.

II. — **80.** Un calorimètre de laiton pesant 500^{gr} contient 2^{kg} d'eau à la température initiale de 10°. Avec une vitesse constante, on fait tomber dans le calorimètre un filet d'eau à 80°, de façon que dans chaque minute le poids d'eau écoulée soit de 5^{gr}. En supposant que le calorimètre ne subisse aucune perte de chaleur, quelle sera la température t^{o} au bout de x secondes?

On prendra 0,095 pour la chaleur spécifique du laiton.

Quelle est la courbe que l'on obtient, en portant les températures t^{o} en ordonnées et les temps x en abscisses?

III. — Décrire les expériences qui ont permis d'effectuer à partir du carbone, de l'hydrogène et de l'azote, la synthèse : 1° Des trois principaux carbures d'hydrogène : acétylène, éthylène, formène; 2° de l'acide cyanhydrique. — Donner les réactions caractéristiques de chacun de ces corps, en insistant sur celles qui permettent de les séparer dans un mélange ne renfermant que ces trois carbures et des vapeurs d'acide cyanhydrique.

QUESTIONS PROPOSÉES

81. — Trouver le lieu des centres des hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles aux axes de coordonnées, passant par l'origine et tangentes à la parabole représentée par l'équation $y = x^2 + 1$. Construire le lieu.

***82.** — Que représente (axes rectangulaires) l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - a(x + y) = 0, \qquad (C)$$

λ désignant un paramètre variable?

2° Lieu des points de contact des tangentes aux coniques (C), parallèles à la bissectrice de l'angle $x'Oy$.

3° Ces coniques (C) coupent les axes de coordonnées en deux points différents de l'origine. Lieu géométrique des points de rencontre des normales en ces deux points.

(A. Audoin, 3e marine, Cherbourg.)

83. — On considère une série d'ellipses concentriques et ayant les mêmes directions d'axes, ainsi qu'une droite fixe. En chacun des points d'intersection de cette droite avec l'une quelconque des ellipses on mène les normales à l'ellipse, qui se rencontrent en un certain point P. De ce point P on abaisse les deux autres normales à l'ellipse. La droite qui joint les pieds de ces dernières normales a pour pôle un point qui reste fixe quelle que soit l'ellipse de la série.

E.-N. Barisien.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. CHAIX. — 8942-5-91.

1re Année. N° 9. Juin 1891.

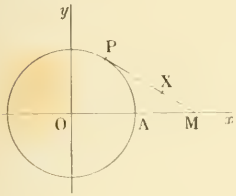
REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

54. — *On donne une circonférence de centre* O *et de rayon* a. *Sur un de ses diamètres on prend un point* M, *et de ce point on mène une des tangentes à la circonférence; soit* P *le point de contact. On demande le lieu des points* X *et* X′ *qui partagent le segment de droite* PM *en moyenne et extrême raison quand le point* M *parcourt le diamètre* AB.

Plus généralement, lieu du point qui partage le segment PM *dans un rapport donné.*

Prenons pour axe des x le diamètre que décrit le point M, et pour axe des y le diamètre perpendiculaire.



Nous allons examiner d'abord le cas général en cherchant le lieu du point X de la droite MP tel que l'on ait

$$\overline{MX} = m.\overline{MP}, \qquad (1)$$

m étant un nombre quelconque, positif ou négatif.

Soient x', y' les coordonnées du point P; on a

$$x'^2 + y'^2 = a^2. \qquad (2)$$

Le point X, de coordonnées x et y, étant sur la tangente en P, on a

$$xx' + yy' = a^2; \qquad (3)$$

et en projetant les segments $\overline{MX}$ et $\overline{MP}$ sur Oy, on déduit de la relation (1)

$$y = my'. \qquad (4)$$

En éliminant x' et y' entre (2), (3) et (4), on aura l'équation du lieu. On obtient aisement

$$x^2(m^2a^2 - y^2) = (ma^2 - y^2)^2,$$

ou, en résolvant par rapport à x,

$$x = \varepsilon \frac{ma^2 - y^2}{\sqrt{m^2a^2 - y^2}}. \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

Le lieu est une courbe du quatrième degré, symétrique par rapport aux deux axes.

On ne peut faire varier y que de $-ma$ à $+ma$; nous ne donnerons à y que des valeurs positives, nous ne prendrons que les valeurs positives correspondantes de x, et nous achèverons par symétrie.

En prenant la dérivée, on a

$$x'_y = \varepsilon \frac{y[y^2 - ma^2(2m - 1)]}{(m^2a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cherchons d'abord si x peut s'annuler. On doit alors avoir $y^2 = ma^2$, ce qui suppose $m > 0$; mais on doit supposer $m^2a^2 - y^2 \geqslant 0$;

donc $\qquad m^2a^2 - ma^2 \geqslant 0 \qquad$ ou $\qquad m(m - 1) \geqslant 0$;

mais m doit être positif; donc x ne pourra s'annuler que si l'on suppose $m > 1$.

D'autre part, pour que x'_y puisse changer de signe, il est nécessaire que $m(2m-1)$ soit positif, donc que m soit négatif ou plus grand que $\frac{1}{2}$. Nous avons donc à distinguer les cas suivants :

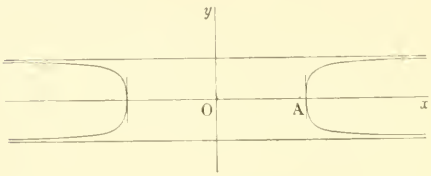
$$1^\circ \quad m < 0, \qquad 2^\circ \quad 0 < m < \frac{1}{2}, \qquad 3^\circ \quad \frac{1}{2} < m < 1, \qquad 4^\circ \quad m > 1.$$

1° *Supposons* $m < 0$. — Nous ne considérerons que des valeurs positives de y. La dérivée x'_y s'annule pour $y = a\sqrt{m(2m-1)}$; mais on a $a\sqrt{m(2m-1)} > -ma$, car en posant $m = -m'$, cette inégalité revient à celle-ci : $\sqrt{m'(2m'+1)} > m'$ ou $m'(2m'+1) > m'^2$ ou encore $2m'+1 > m'$.

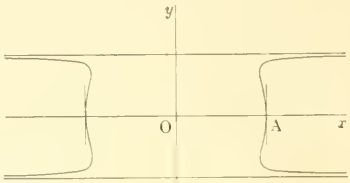
Il en résulte que y variant de 0 à ma, en supposant $\varepsilon = -1$, x va en croissant de a à $+\infty$.

2° $0 < m < \frac{1}{2}$. — Dans ce cas $m(2m-1)$ est négatif, donc x'_y ne peut s'annuler; on arrive aux mêmes conclusions que dans le premier cas. Donc si l'on suppose $m < \frac{1}{2}$ la courbe a la forme (I).

(I) $m < \frac{1}{2}$.

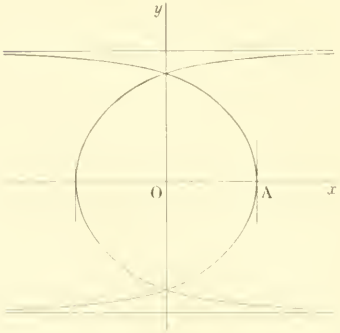


(II) $\frac{1}{2} < m < 1$.



3° $\frac{1}{2} < m < 1$. — La dérivée x'_y s'annule en changeant de signe pour $y = a\sqrt{m(2m-1)}$; x décroît depuis a jusqu'à un certain minimum, puis va en croissant jusqu'à $+\infty$ (en supposant $\varepsilon = +1$); on obtient donc la forme (II).

(III) $m > 1$.



4° Enfin soit $m > 1$; x'_y conserve un signe invariable; en supposant $\varepsilon = +1$, x décroît de a à $-\infty$, et est nul pour $y = a\sqrt{m}$. On a ainsi la forme (III).

Entre les figures (II) et (III), nous avons une forme intermédiaire correspondant à $m = 1$, et qui se compose du cercle donné et des tangentes $y = \pm a$.

Pour trouver le lieu des points X et X' qui divisent MP en moyenne et extrême raison, il suffit de remplacer m successivement par $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ dans l'équation du lieu trouvé plus haut. Comme $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, le lieu se composera de deux courbes du quatrième degré ayant les formes (I) et (III).

A. Audouin, élève de marine, lycée de Cherbourg.

[Solutions analogues par MM. Auzeram (lycée de Toulouse), A. Delpierre, élève de marine (Dieppe); Perree (lycée Condorcet).]

55. — *On donne deux cercles fixes* C, C′ *et l'on considère deux cercles variables* S, S′ *tangents aux premiers. Lieu des points de Poncelet relatifs aux cercles* S, S′.

Solution géométrique. — Soit S un cercle variable touchant deux cercles fixes C, C′. Nous supposerons que la nature du contact de S avec chacun des deux cercles C et C′ soit déterminée; pour fixer les idées supposons ces deux contacts extérieurs, les deux cercles C et C′ étant eux-mêmes supposés extérieurs ou sécants. Dans ce cas, le centre de similitude direct ω de (C) et (C′) a une puissance constante par rapport au cercle variable S, d'où il résulte que les cercles S sont orthogonaux à un cercle fixe (Γ) ayant pour centre ω. Si l'on prend deux cercles S_p, S_q appartenant à la famille (S) considérée, les points de Poncelet relatifs à S_p et S_q sont sur le cercle (Γ). Si l'on considère un cercle variable S′ tangent à C et C′, le contact avec chacun de ces cercles étant un contact intérieur, les points de Poncelet relatifs à deux cercles S'_p, S'_q de cette seconde famille et les points de Poncelet relatifs à un cercle S_p et à un cercle S'_p sont sur le même cercle (Γ).

J. Bessart (Paris).

Solution analytique. — Prenons pour axe des x la ligne des centres des deux cercles donnés, et pour axe des y la perpendiculaire à la ligne des centres menée par l'un des centres de similitude des deux cercles. Soit k le rapport de similitude; les équations des deux cercles donnés sont

$$x^2 + y^2 - 2ax + b^2 = 0, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2akx + k^2b^2 = 0. \qquad (2)$$

L'ensemble des deux cercles est représenté, comme on le vérifie aisément, par l'équation

$$[x^2 + y^2 - a(1 + k)x + kb^2]^2 - x^2(a^2 - b^2)(1 - k^2) + y^2b^2(1 - k^2) = 0.$$

Si l'on pose $a^2 - b^2 = R^2$, on peut considérer les deux cercles donnés comme l'enveloppe des cercles représentés par l'équation

$$\lambda^2(Rx + by)(1 - k^2) - 2\lambda[x^2 + y^2 - a(1 + k)x + kb^2] + Rx - by = 0. \qquad (3)$$

Donnons à λ une valeur particulière; nous aurons un cercle (λ) tangent aux deux cercles donnés, et soit un autre cercle (μ) représenté par l'équation

$$\mu^2(Rx + by)(1 - k^2) - 2\mu[x^2 + y^2 - a(1 + k)x + kb^2] + Rx - by = 0. \qquad (4)$$

Les points de Poncelet relatifs à ces deux cercles sont caractérisés par la propriété d'avoir même polaire par rapport à ces deux cercles. Soient x, y, z les coordonnées homogènes d'un de ces points; les dérivées par rapport à x, y, z des premiers membres des équations (3) et (4) sont proportionnelles; si l'on appelle h le coefficient de proportionnalité, on aura :

$$Rz(1 - k^2)(\lambda^2 - h\mu^2) - 2(\lambda - \mu h)[2x - a(1 + k)z] + Rz(1 - h) = 0,$$

$$bz(1 - k^2)(\lambda^2 - h\mu^2) - 2(\lambda - \mu h)2y - bz(1 - h) = 0,$$

$$(Rx + by)(1 - k^2)(\lambda^2 - h\mu^2) - 2(\lambda - \mu h)[2kb^2z - a(1 + k)x] + (Rx - by)(1 - h) = 0.$$

En éliminant $(1 - k^2)(\lambda^2 - h\mu^2)$, $2(\lambda - \mu h)$ et $1 - h$ entre ces trois équations, on obtient l'équation du lieu (en faisant $z = 1$) :

$$\begin{vmatrix} R & 2x - a(1 + k) & R \\ b & 2y & -b \\ Rx + by & 2kb^2 - a(1 + k)x & Rx - by \end{vmatrix} = 0.$$

En multipliant la première ligne par x, la seconde par y et retranchant de la troisième, il vient

$$\begin{vmatrix} R & 2x - a(1 + k) & R \\ b & 2y & -b \\ 0 & 2b^2k - 2x^2 - 2y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

ou, simplement

$$x^2 + y^2 - b^2k = 0.$$

Cette équation représente un cercle ayant son centre à l'origine et passant par l'intersection des deux premiers.

Le calcul précédent s'applique à toute quartique bicirculaire, car on peut regarder une pareille courbe comme l'enveloppe de cercles définis par l'équation

$$\lambda^2 P - 2\lambda C + Q = 0,$$

$C = 0$ représentant un cercle et $P = 0$, $Q = 0$ deux droites.

(Pilleux, lycée Louis-le-Grand.)

---

57. — *Lieu des sommets des cônes circonscrits à un ellipsoïde et qui sont coupés par un plan donné suivant un cercle.*

Je prends pour plan des xy un plan passant par le centre de l'ellipsoïde et parallèle au plan donné, les axes des x et des y étant les axes de la section ainsi déterminée. L'axe des z sera le diamètre conjugué du plan des xy; l'équation de l'ellipsoïde dans ce système d'axes sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

équation dans laquelle on peut supposer $a > b$, car on peut toujours diriger Ox suivant le plus grand des axes de l'ellipse du plan des xy.

Soient α, β, γ les coordonnées d'un point du lieu; le cône circonscrit à l'ellipsoïde ayant ce point pour sommet a pour équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)^2 = 0.$$

J'écris que ce cône est coupé par le plan des xy suivant un cercle; on obtient aisément les deux conditions

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right),$$

$$\alpha\beta = 0.$$

Le lieu cherché se compose donc des deux courbes

$$(1) \quad \begin{cases} x = 0, \\ -\dfrac{y^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} y = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$$

La première est une hyperbole dans le plan des yz, ayant pour diamètres conjugués Oy et Oz. La deuxième est une ellipse dans le plan des zx ayant pour diamètres conjugués Ox et Oz. Les deux courbes passent par les points de rencontre de l'ellipsoïde et de Oz, l'ellipse passe par les foyers réels de la section de l'ellipsoïde par le plan des xy, et l'hyperbole passe par les foyers imaginaires de cette même section.

P. Lemoult, soldat au 93e de ligne, à la Roche-sur-Yon.

Solution semblable par M. Baudran, lycée de Rouen.

Solution géométrique. — Les directrices des cônes considérés sur le plan donné devant passer par les points cycliques du plan, leurs sommets se trouvent à la fois sur les deux cônes ayant pour sommets les points cycliques du plan donné et circonscrits à l'ellipsoïde. Ces cônes se coupent suivant deux courbes planes et les plans de ces coniques passent par l'intersection des plans polaires des points cycliques. Ces points cycliques étant sur le plan de l'infini et sur le plan donné, leurs plans polaires passent par le centre de l'ellipsoïde et par le pôle du plan. La droite qui joint ces deux points est le

diamètre conjugué du plan ; le lieu se compose donc de deux coniques dont les plans se coupent suivant le diamètre conjugué du plan.

Pour déterminer complètement ces deux coniques, menons des plans auxiliaires par la ligne des sommets des deux cônes dont l'intersection donne le lieu. Les quatre génératrices d'intersection passant par les points cycliques et étant tangentes à l'ellipse de section donnent les foyers de cette ellipse de section.

On est donc ramené à chercher le lieu des foyers des sections d'un ellipsoïde par des plans parallèles au plan donné ; et comme nous savons que ce lieu se compose de deux coniques, on trouve aisément les deux coniques obtenues par la voie analytique. L'ellipse (2) est le lieu des foyers réels des ellipses réelles, tandis que l'hyperbole (1) est le lieu des foyers réels des ellipses imaginaires.

Joseph Cluzet, collège Stanislas.

---

58. — *Étant donné un système d'axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *on décrit de l'origine comme centre, dans le plan des* xy, *un cercle* C *de rayon* R, *et on prend sur l'axe des* x *un point* A, *à une distance* a *de l'origine. On mène par* A *une sécante rencontrant le cercle aux points* M *et* N. *Sur* MN *comme diamètre, dans un plan perpendiculaire au plan des* xy, *on décrit un cercle* C′.

1° Lieu des centres des quadriques S *qui passent par les cercles* C *et* C′ *quand la sécante tourne autour du point* A.

2° Séparer sur la surface obtenue les régions qui correspondent aux centres des différents genres de quadriques.

3° Trouver la surface Σ, *lieu des axes des paraboloïdes passant par les cercles* C *et* C′.

4° Étudier la surface Σ, *en la coupant par des plans parallèles aux plans de coordonnées. Trouver son contour apparent sur le plan des* zx.

5° Indiquer un mode de génération simple de la surface Σ, *basé sur des considérations élémentaires.*

(Concours académique, Nancy et Besançon, 1879.)

Le cercle C′ est à l'intersection de la sphère qui a le cercle C pour grand cercle avec le plan parallèle à Oz mené par AM.

Cette sphère a pour équation $$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Le plan du cercle C′ aura pour équation

$$\lambda y + \mu(x - a) = 0;$$

par conséquent, l'équation générale des surfaces S sera

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + 2z[\lambda y + \mu(x - a)] = 0.$$

1° — Les équations du centre sont

$$x + \mu z = 0,$$
$$y + \lambda z = 0,$$
$$z + \lambda y + \mu(x - a) = 0.$$

Éliminons λ et μ entre ces trois équations; on obtient

$$x^2 + y^2 - z^2 - ax = 0,$$

qui est l'équation du lieu. Cette équation représente un hyperboloïde de révolution à une nappe H, ayant pour cercle de gorge le cercle décrit sur OA comme diamètre, les génératrices faisant 45° avec l'axe de révolution.

2° — Décomposons en carrés le premier membre de l'équation des surfaces S. On obtient immédiatement

$$(x+\mu z)^2+(y+\lambda z)^2+z^2(1-\lambda^2-\mu^2)-2a\mu z-R^2=0,$$

et en supposant

$$1-\lambda^2-\mu^2\neq 0,$$

$$(x+\mu z)^2+(y+\lambda z)^2+\frac{1}{1-\lambda^2-\mu^2}[z(1-\lambda^2-\mu^2)-a\mu]^2-\frac{a^2\mu^2+R^2(1-\lambda^2-\mu^2)}{1-\lambda^2-\mu^2}=0.$$

Le genre de la surface dépend du signe des quantités $1-\lambda^2-\mu^2$ et $a^2\mu^2+R^2(1-\lambda^2-\mu^2)$.

Si $1-\lambda^2-\mu^2>0$ la surface est un ellipsoïde réel;

Si $1-\lambda^2-\mu^2<0$ $\begin{cases} a^2\mu^2+R^2(1-\lambda^2-\mu^2)>0 & \text{la surface est un hyperboloïde à deux nappes;} \\ a^2\mu^2+R^2(1-\lambda^2-\mu^2)=0 & \text{— cône réel;} \\ a^2\mu^2+R^2(1-\lambda^2-\mu^2)<0 & \text{— hyperboloïde à une nappe.} \end{cases}$

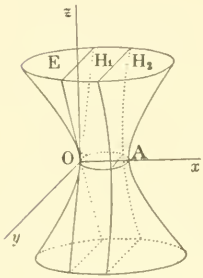
Cela posé, des équations du centre on tire

$$\lambda=-\frac{y}{z},\qquad \mu=-\frac{x}{z};$$

ce qui donne

$$1-\lambda^2-\mu^2=\frac{z^2-x^2-y^2}{z^2},\qquad a^2\mu^2+R^2(1-\lambda^2-\mu^2)=\frac{a^2x^2+R^2(z^2-x^2-y^2)}{z^2};$$

et comme pour tout point du lieu $x^2+y^2-z^2=ax$,



on voit que $1-\lambda^2-\mu^2$ a le signe de $-x$ (a étant supposé positif) et $a^2\mu^2+R^2(1-\lambda^2-\mu^2)$ le signe de $x(ax-R^2)$.

En coupant alors l'hyperboloïde H par les plans $x=0$ et $ax-R^2=0$, on separera sur la surface les régions qui correspondent aux centres des différents genres de surfaces S.

Le plan $x=0$ coupe H suivant deux droites, et le plan $ax-R^2=0$, suivant une hyperbole.

L'hyperboloïde se trouve partagé en trois régions; les points de la première ayant des abscisses négatives sont des centres d'ellipsoïdes réels; ceux de la région intermédiaire sont des centres d'hyperboloïdes à une nappe, et enfin ceux de la troisième région sont des centres d'hyperboloïdes à deux nappes. L'hyperbole, section par le plan $ax-R^2=0$, est le lieu des centres des cônes réels.

Reste enfin à examiner le cas où $1-\lambda^2-\mu^2=0$. Les surfaces S sont alors des paraboloïdes, leurs centres sont rejetés à l'infini, à moins que l'on n'ait en même temps $\mu=0$. Dans ce cas, $\mu=0$ et $\lambda=\pm 1$, les surfaces S sont des cylindres dont les axes sont les droites

$$x=0,\qquad y\pm z=0;$$

ce sont précisément les droites de l'hyperboloïde H qui sont dans le plan $x=0$.

3° — Pour que les surfaces S soient des paraboloïdes, il faut que

$$1-\lambda^2-\mu^2=0. \tag{1}$$

La direction de l'axe est alors donnée par les deux équations

$$x+\mu z=0,\qquad y+\lambda z=0; \tag{2}$$

et l'axe lui-même s'obtiendra en prenant le diamètre conjugué de la direction du plan perpendiculaire à la direction (2), soit

$$\frac{x+\mu z}{\mu}=\frac{y+\lambda z}{\lambda}=\frac{\mu(x+\mu z)+\lambda(y+\lambda z)-a\mu}{-1}. \tag{3}$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant λ et μ entre les équations (1) et (3).

Des équations (3), on tire

$$\frac{x}{\mu} = \frac{y}{\lambda} = \frac{1}{\nu};$$

ou

$$\mu = \nu x, \qquad \lambda = \nu y.$$

Remplaçons dans (1) et (3); on obtient

$$\nu^2(x^2 + y^2) - 1 = 0,$$

et

$$\nu^2(x^2 + y^2 - ax) + 2\nu z + 1 = 0.$$

Éliminant ν entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu, c'est-à-dire

$$[2(x^2 + y^2) - ax]^2 - 4z^2(x^2 + y^2) = 0.$$

C'est la surface Σ, du quatrième degré, symétrique par rapport aux plans des xy et des xz.

4° — Coupons cette surface par le plan $z = l$; on obtient

$$[2(x^2 + y^2) - ax]^2 - 4l^2(x^2 + y^2) = 0,$$

ou, passant en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{a}{2}\cos\omega + l.$$

Cette équation représente un limaçon de Pascal, à point double si $l < \frac{a}{2}$; à point de rebroussement pour $l = \frac{a}{2}$; avec deux points d'inflexion si $\frac{a}{2} < l < a$; enfin sans points d'inflexion si $l > a$.

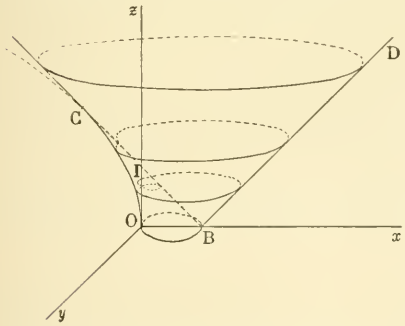
Le plan des zx coupe la surface suivant l'axe des z et deux droites, la droite BC $(2x + 2z - a = 0)$ et la droite BD $(2x - 2z - a = 0)$. Ces deux droites contiennent les sommets des limaçons; tandis que les points doubles de ces courbes sont sur l'axe Oz, du point O au point I, de cote $\frac{a}{2}$.

Pour avoir le contour apparent de la surface sur le plan des zx, il suffit d'écrire que l'équation de la surface admet une racine double en y ou en $x^2 + y^2$, ce qui donne

$$z^2 + 2ax = 0;$$

c'est une parabole tangente à l'origine à l'axe des z, et à la droite BC, au point C de coordonnées

$$x = -\frac{a}{2},\ z = a.$$



Ces considérations suffisent à donner une idée nette de la forme de la surface. Nous en étudierons seulement la moitié, qui est située au-dessus du plan des xy.

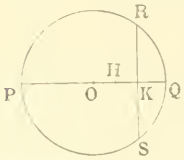
Les points doubles des limaçons sont sur Oz, du point O jusqu'au point I, lequel est le point de rebroussement de la cardioïde. A partir de ce point l'axe des z est une droite isolée de la surface.

La parabole $z^2 + 2ax = 0$ n'est contour apparent que jusqu'au point C; au delà, c'est la droite BC qui la remplace, et cela au moment où les limaçons n'ont plus de points d'inflexion.

En coupant par des plans parallèles aux plans des zx et des yz, on a des courbes du quatrième degré qui se construisent aisément.

5° — Les plans des cercles C et C′ sont deux plans cycliques des surfaces S, leur intersection est perpendiculaire à un plan principal ; par conséquent, si la surface est un paraboloïde, son axe sera dans le plan perpendiculaire au milieu de MN, ce sera l'axe de la parabole section.

Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle, et les cercles C, C′ suivant le diamètre PQ et la perpendiculaire RS. La parabole principale devra passer par les quatre points P, Q, R, S. Il y a deux paraboles passant par ces quatre points, leurs axes sont parallèles aux bissectrices des droites PQ et RS, et passent par le point H, milieu de OK.



En conséquence, à une position de la droite MN correspondent deux paraboloïdes dont les axes rencontrent Oz, font 45° avec cet axe et percent le plan des xy au point H, milieu de la droite qui joint le point O au milieu K de MN. Or le lieu du point H est le cercle décrit sur le milieu de OA comme diamètre.

La surface Σ est donc engendrée par une droite s'appuyant sur le cercle décrit sur la moitié de OA comme diamètre dans le plan des xy, et sur l'axe des z, avec lequel elle fait l'angle de 45°.

Cette génération montre bien que les sections par des plans parallèles au plan des xy sont des limaçons de Pascal.

E. Baudran, lycée de Rouen.

Ont résolu la même question : MM. A. Alayrac (lycée Saint-Louis) ; P. Lemoult, soldat au 93e de ligne (la Roche-sur-Yon).

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

52. — *Un cube de 15cm de côté a l'une de ses trois directions d'arêtes verticale, et une autre perpendiculaire au plan vertical.*

Dans la face postérieure, considérons l'arête de gauche, l'arête inférieure et le sommet situé à l'intersection des deux autres arêtes.

La droite passant par ce sommet et par le sommet opposé du cube, engendrerait, si elle tournait successivement autour des deux arêtes considérées, deux hyperboloïdes qu'on suppose remplis.

Représenter, par ses projections, le corps formé par la partie commune aux deux solides ainsi obtenus, en le limitant en haut et en bas par les plans des deux faces horizontales du cube, et en arrière par celui de la face postérieure.

On placera au centre du cadre de l'épure la projection horizontale du point de rencontre des axes des deux hyperboloïdes, et, à un centimètre au-dessus, sur une parallèle aux petits côtés, la projection verticale du même point.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

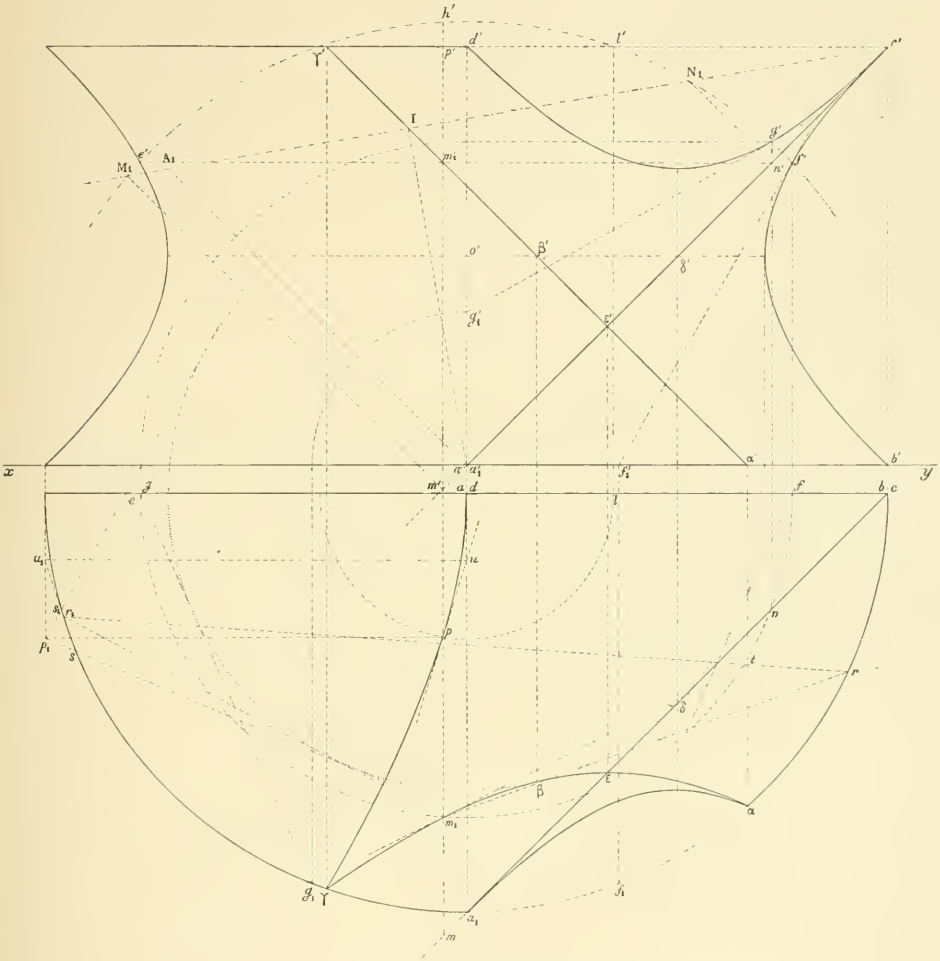
On n'indiquera aucune asymptote.

(École Polytechnique, 1890.)

Soient $(abcd, a'b'c'd')$ la face postérieure du cube et $(ca_1, c'a'_1)$ la diagonale génératrice des deux hyperboloïdes.

Pour obtenir des parallèles de chacune des deux surfaces de révolution, coupons-les par une sphère quelconque ayant son centre en (a, a'), point de rencontre des axes. Cette sphère rencontre la

génératrice commune $(ca_1, c'a'_1)$ en deux points rabattus en M_1 et N_1 sur un plan parallèle au plan vertical. Ces points, relevés en (m, m') et (n, n'), déterminent, dans les limites de l'épure, trois parallèles projetés verticalement suivant $e'f'$, $g'n'$, $h'm'$. Le demi-parallèle $(ef, e'f')$ coupe les deux autres en deux



points (n, n') et (m_1, m'_1), qui appartiennent à l'intersection des deux surfaces. Il résulte de cette construction que l'intersection se projette verticalement suivant la droite $a'c'$ et une perpendiculaire à $a'c'$ menée par la projection I de a' sur $A_1 c'$. L'intersection se décompose ainsi en deux droites et une hyperbole comme on pouvait le prévoir *a priori*.

Les points g', f' sont évidemment symétriques par rapport à $a'c'$, de sorte que les courbes méridiennes sont égales dans les deux surfaces, ce qui abrège d'autant la construction de ces courbes.

La sphère auxiliaire coupe la face supérieure du cube suivant un demi-cercle de centre (d, d') et de rayon $d'l'$; sa rencontre avec le parallèle $m'h'$ fournit un point (p, p') de la section de l'hyperboloïde dont l'axe est horizontal avec le plan horizontal $d'c'$.

Les tangentes en f', g' aux courbes méridiennes ont été obtenues en menant les génératrices $(ff_1, f'f'_1)$, $(gg_1, g'g'_1)$ de chaque surface. Pour la tangente en m_1, on a pris l'intersection m_1t du plan $\alpha\alpha'\gamma'$ avec le plan m_1rr_1 des deux génératrices issues de m_1 de l'hyperboloïde à axe vertical: en appliquant la même construction au point (p, p'), on a le point u où la tangente en p perce le plan de profil $a_1a'd'$ considéré comme plan vertical auxiliaire.

Les points remarquables de l'intersection des deux surfaces sont : sur le parallèle extrême inférieur les points (a_1, a'_1) (α, α'); sur le cercle de gorge les points de contact (β, β') (δ, δ'); sur le parallèle extrême supérieur les points (c, c') (γ, γ'). En outre, le point $(\varepsilon, \varepsilon')$ est un point double de l'intersection.

Louis Messent.

PHYSIQUE

79. — *Au milieu d'une enceinte entourée de glace fondante est placé un vase solide en laiton, entièrement clos, qui contient un certain poids d'eau privée d'air. Le vase et l'eau qu'il contient ayant été chauffés, on demande de décrire les différentes phases du refroidissement, et d'indiquer les particularités présentées par la vitesse du refroidissement suivant la quantité d'eau contenue dans le vase.*

On admettra : que le rayonnement obéit à la loi de Newton ; — que la densité de la vapeur d'eau reste constante et égale à 0,622.

On négligera les variations du volume du vase ainsi que les variations du poids spécifique et de la chaleur spécifique de l'eau avec la température. On négligera aussi la différence des deux chaleurs spécifiques de la vapeur d'eau.

Données numériques générales :

Chaleur spécifique de la vapeur d'eau	0,37 *par gramme.*
Chaleur latente de vaporisation	606,5 — 0,695 t.

Tension maximum de la vapeur d'eau en millimètres de mercure :

$$\text{à } 80^\circ : \quad \varpi = 355, \quad \frac{d\varpi}{dt} = 1,44$$

$$\text{à } 100^\circ : \quad \varpi = 760, \quad \frac{d\varpi}{dt} = 2,72$$

$$\text{à } 120^\circ : \quad \varpi = 1491, \quad \frac{d\varpi}{dt} = 4,70.$$

Application numérique. — *Calculer les vitesses de refroidissement à* 100° *et* 120°, *en prenant pour unité la vitesse de refroidissement à* 80°, *dans le cas suivant :*

Poids du vase	1 *kilogramme.*
Chaleur spécifique du laiton	0,086.
Volume intérieur.	1 *litre.*
Poids de l'eau contenue	$0^{gr},5886$.

(École normale, 1889.)

Soit Mgr la masse d'eau contenue dans le récipient. Soient, à une certaine température t, M_1^{gr} la masse d'eau liquide, m^{gr} celle de la vapeur. On a évidemment

$$M = M_1 + m.$$

Calculons m. Soit V^{cc} le volume intérieur du vase de laiton, supposé invariable ; on a

$$M_1 + \frac{m}{0.001293 \cdot \frac{1}{1+\alpha t} \cdot \frac{\varpi}{760} \cdot 0{,}622} = V.$$

ϖ étant la tension de la vapeur a la température t;

d'où
$$m = \frac{V - M}{\frac{(1+\alpha t).760}{0{,}001293.\varpi.0{,}622} - 1}.$$

Remarquons que le premier terme du dénominateur est très grand par rapport au second, l'unité, et nous aurons sensiblement

$$m = \frac{0{,}001293 \times 0{,}622}{760} \cdot \frac{(V - M)\varpi}{1 + \alpha t},$$

$$m = 0{,}000001058 \cdot \frac{(V - M)\varpi}{1 + \alpha t}. \qquad (1)$$

Ceci posé, soient, au temps x, t la température de l'eau et de la vapeur, m la masse de la vapeur. Appelons C la capacité calorifique du récipient. D'après la loi de Newton : « la quantité de chaleur rayonnée en un temps dx est proportionnelle à l'excès t de la température du récipient sur celle de l'enceinte » ; — elle est encore proportionnelle à l'intervalle de temps considéré dx, et si l'on désigne par K un coefficient qui dépendra de la nature des parois du vase et de l'enceinte, cette quantité de chaleur sera représentée par

$$K.t.dx.$$

Elle résulte : 1° d'un abaissement de température $-dt$ subi par le vase, l'eau et la vapeur; 2° de la condensation d'une masse de vapeur $-dm$. On a donc

$$K.t.dx = -(M_1 + C + m\gamma)dt - \lambda dm,$$

λ étant la chaleur de vaporisation de l'eau à t^o, et γ la chaleur spécifique de la vapeur d'eau supposée constante. — D'où l'on tire

$$-\frac{dt}{dx} = \frac{Kt}{M + C + \lambda \cdot \frac{dm}{dt} - (1 - \gamma)m}.$$

Dans cette égalité, remplaçons λ par $606{,}5 - 0{,}695\,t$, m par sa valeur, et $\frac{dm}{dt}$ par sa valeur tirée de la relation (1) :

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}000001058(V - M).\frac{(1+\alpha t)\frac{d\varpi}{dt} - \alpha\varpi}{(1+\alpha t)^2};$$

il vient

$$-\frac{dt}{dx} = \frac{Kt}{M + C + \frac{0{,}000001058(V - M)}{1 + \alpha t}\left\{(606{,}5 - 0{,}695t)\left(\frac{d\varpi}{dt} - \frac{\varpi}{\frac{1}{\alpha} + t}\right) - (1 - \gamma)\varpi\right\}} \qquad (2)$$

D'après cette expression de la vitesse du refroidissement à un instant x, on voit que si le vase était plein d'eau, M étant égal à V, on aurait

$$-\frac{dt}{dx} = \frac{K.t}{M + C};$$

la vitesse de refroidissement serait à chaque instant proportionnelle à l'excès t de la température de l'eau sur celle de l'enceinte, tout se passerait comme s'il s'agissait d'un système non volatil de capacité calorifique constante M + C. — Si le vase est presque rempli d'eau, M ne diffère pas sensiblement de

V, et le résultat précédent est acceptable avec une grande approximation, car la condensation de la vapeur n'a pas d'influence appréciable sur le refroidissement général. Si au contraire M est fort différent de V, la vitesse de refroidissement, pour un excès déterminé t, est plus petite que ne le serait celle d'un système non volatil de capacité calorifique $M + C$; cette atténuation est due à la condensation progressive de la vapeur qui occupe l'espace laissé libre par le liquide; son effet est surtout sensible aux températures élevées, parce que le terme $\frac{d\varpi}{dt}$ a alors une grande valeur. Mais à mesure que la température s'abaisse, $\frac{d\varpi}{dt}$ diminue, et la vitesse de refroidissement tend à devenir égale à celle du système non volatil considéré, pour un excès t donné. Théoriquement, elle atteint cette limite au bout d'un temps infini, lorsque l'excès t devient nul.

Si, dans l'exemple donné, le système n'était pas volatil, on trouverait, en prenant comme unité de vitesse de refroidissement celle que l'on observerait à 80°,

$$\text{à } 120^\circ, \qquad v_1 = \frac{3}{2};$$

$$\text{à } 100^\circ, \qquad v_2 = \frac{5}{4}.$$

Dans le cas actuel, et en prenant de même comme unité de vitesse de refroidissement la vitesse de refroidissement à 80°, on trouve, en appliquant la formule (2) :

$$\text{à } 120^\circ, \qquad v_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{M + C + 0{,}003855(V - M)}{M + C + 0{,}015920(V - M)};$$

$$\text{à } 100^\circ, \qquad v_2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{M + C + 0{,}003855(V - M)}{M + C + 0{,}010020(V - M)}.$$

On voit aisément que le coefficient qui atténue l'expression de la vitesse de refroidissement est plus petit à 120° qu'à 100°, ce qui confirme le résultat précédemment obtenu.

Application numérique. — $V = 1000^{cc}$, $C = 86^{gr}$, $M = 0^{gr},5886$.

$$\text{à } 120^\circ, \qquad v_1 = \frac{3}{2} \times 0{,}901862 = 1{,}352793;$$

$$\text{à } 100^\circ, \qquad v_2 = \frac{5}{4} \times 0{,}956811 = 1{,}196014.$$

LAFOLIE, élève au lycée Saint-Louis.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École polytechnique (1890). — *(Fin.)*

147. — Lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point (a, b, c) sur les plans tangents à un paraboloïde hyperbolique.

148. — Équation générale des quadriques contenant Oz et un cercle du plan des xy et passant par l'origine. Lieu des centres. Séparer sur le lieu trouvé les centres de cônes et d'hyperboloïdes.

149. — On donne un diamètre d'une quadrique en grandeur et en position; combien cela fait-il de conditions? On en donne deux, puis trois. Équation générale des quadriques ayant trois droites pour diamètres.

150. — On donne trois droites A, B, C dont deux ne sont pas dans un même plan. Par A on fait passer un plan P, et on mène à ce plan une perpendiculaire rencontrant B et C. Lieu du pied de cette perpendiculaire quand le plan P

tourne autour de la droite A. Étudier le problème géométriquement, en cherchant les surfaces sur lesquelles se trouve un point du lieu.

151. — On considère le conoïde engendré par une droite rencontrant Oz, parallèle au plan des xy et s'appuyant sur l'ellipse $x = \alpha$, $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0$. Calculer le volume de la portion de ce conoïde compris entre Oz et le plan $x = \alpha$.

152. — On donne deux cylindres de révolution égaux dont les axes se rencontrent et sont rectangulaires. Trouver l'expression du volume commun.

153. — On donne la parabole $y^2 - 2px = 0$. Existe-t-il dans l'espace un point (α, β, γ) tel que la distance de ce point à un point quelconque de la parabole soit fonction linéaire des coordonnées de ce dernier ?

154. — On considère un trièdre dont les trois faces sont égales à un angle α. On mène la droite OA faisant avec les trois arêtes des angles égaux. Quel doit être l'angle α, pour que l'angle de OA avec les trois arêtes soit égal à α ?

155. — On donne trois axes de coordonnées rectangulaires. Un cercle situé dans le plan des xy a son centre à l'origine. Par un point A fixe sur Ox, on mène une sécante quelconque ABC dans le plan des xy, et sur BC comme diamètre on décrit un cercle dans un plan parallèle à Oz. Équation générale des quadriques passant par ces deux cercles. Lieu des centres. Séparer sur le lieu trouvé les centres des différentes surfaces.

156. — On donne l'axe d'un paraboloïde et quatre points de la surface ; construire les éléments de la surface.

157. — Mener par l'intersection de deux quadriques une quadrique tangente à un plan. Étudier le problème géométriquement.

158. — On donne un plan diamétral d'une quadrique ; combien cela fait-il de conditions ? On donne un plan asymptote d'un hyperboloïde, combien de conditions ? On donne cinq plans asymptotes, quels sont les éléments de la surface qu'on peut construire ?

159. — Mener par un point extérieur des normales à un paraboloïde ; équation de la sphère passant par les pieds de quatre de ces normales.

160. — Construire les éléments d'un paraboloïde hyperbolique connaissant l'axe, une génératrice et un point.

IV. — Géométrie descriptive.

161. — Intersection d'un cône et d'un cylindre ayant même directrice dans le plan horizontal ; le cylindre a ses génératrices de profil. Dans le cas où la directrice commune est une conique, trouver le plan de la seconde courbe plane.

162. — Mener un plan tangent à un cône parallèlement à une direction donnée. Le cône est donné par son sommet ; sa directrice est un cercle dont le centre est dans un plan donné par ses traces et dont le rayon est connu.

163. — On mène un plan faisant 45° avec la ligne de terre ; un point dans ce plan est centre d'un cercle de rayon donné. Ce cercle est la directrice d'un cône ayant son sommet en un point quelconque. Développer une section plane quelconque.

164. — Intersection d'un cône et d'un cylindre circonscrit à une même sphère. Les données sont absolument quelconques.

165. — Intersection d'une sphère et d'un cône dont le sommet s, s' est dans le plan horizontal, dont la directrice est un cercle situé dans un plan de profil. Points remarquables.

166. — On donne un cône par son sommet et sa directrice dans le plan horizontal. On le coupe par un plan quelconque et l'on prend cette section comme base d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. Mener à ce cylindre un plan tangent par un point extérieur.

167. — Intersection d'un cône droit d'axe vertical et d'un cylindre de révolution d'axe parallèle à la ligne de terre.

168. — Section plane d'une surface de révolution dont l'axe est de front.

169. — On donne une sphère, une droite dans un plan de profil inclinée à 45° sur les plans de projection. Mener à la sphère un plan tangent à une distance donnée de la droite.

170. — Un hyperboloïde d'axe vertical est défini par trois parallèles. Trouver le cercle de gorge.

171. — On donne une sphère et un plan. Un point donné (s, s') est le sommet d'un cône ayant pour directrice la section de la sphère par le plan. Intersection de ce cône et d'une droite.

172. — Déterminer l'axe d'une surface gauche de révolution connaissant deux génératrices et deux points sur chacune d'elles, sachant que ces deux points sont sur une même parallèle.

173. — Construire les contours apparents d'un cylindre de révolution connaissant deux génératrices et le rayon.

174. — Construire les contours apparents d'un cône de révolution connaissant deux génératrices et l'angle au sommet.

175. — Intersection de deux cylindres dont l'un a pour directrice dans le plan horizontal une conique et a ses génératrices de profil inclinées à 45° sur le plan horizontal. L'autre cylindre a ses génératrices parallèles à la ligne de terre, sa section droite est une conique.

176. — Un cône a pour directrice la section plane d'une sphère. On donne la projection horizontale d'un point de la surface, trouver la projection verticale et le plan tangent en ce point.

177. — Intersection de deux cylindres ayant pour directrices dans le plan horizontal deux hyperboles conjuguées. Points à l'infini.

178. — On donne deux sections cycliques de même système dans l'hyperboloïde et une génératrice qui s'appuie sur les deux. Construire les éléments de l'hyperboloïde ainsi défini, et l'autre direction cyclique.

179. — Intersection d'une droite et d'un ellipsoïde à trois axes inégaux.

180. — On donne un cône oblique à base circulaire et un plan qui coupe ce cône; on considère d'autre part le cylindre ayant pour directrice la section plane du cône; les génératrices du cylindre sont parallèles à une droite de profil rencontrant la ligne de terre et passant par le sommet du cône. Intersection des deux surfaces.

181. — On donne un cône à base circulaire située dans le plan horizontal. Ce cône oblique est le cône asymptote d'un hyperboloïde dont on donne encore un point. La surface est-elle définie? Construire la projection verticale d'un point donné par sa projection horizontale, et le plan tangent en ce point.

182. — On considère deux droites qui se coupent et une conique située dans le plan de ces deux droites et qui est donnée par sa projection horizontale; elle est la base commune de deux cônes de sommets donnés. Intersection de ces deux cônes. Trouver les points de contact des deux surfaces.

183. — On donne un cône à base circulaire dans le plan horizontal et une droite verticale. Normales communes au cône et à la droite.

184. — On donne deux droites et un point. Déterminer le plan polaire du point par rapport au paraboloïde engendré par une horizontale s'appuyant sur ces deux droites.

185. — On donne un point s, s', deux droites passant par s', deux droites passant par s. Existe-t-il des cônes du second degré ayant ces droites pour contours apparents? Les déterminer.

186. — On donne une droite (A, A') et deux points (m, m') et (p, p'). On demande l'angle des deux plans contenant la droite et passant par les deux points.

187. — On donne un plan par deux droites qui se coupent. Une courbe de ce plan est donnée par sa projection horizontale; c'est la directrice d'un cylindre dont la direction des génératrices est donnée. Intersection de ce cylindre avec le plan bissecteur du second dièdre. Tangente en un point de l'intersection et tangente parallèle à une direction donnée.

188. — On donne une droite (A, A') et trois points (a, a') (b, b') (c, c'). On considère deux plans déterminés par la droite avec chacun des deux points (a, a') et (b, b'). Construire le cylindre de révolution tangent à ces deux plans et passant par le point (c, c').

189. — Mener par une droite un plan coupant une verticale suivant un angle donné.

190. — Trouver l'axe d'un cône de révolution connaissant deux génératrices horizontales et une génératrice de front.

191. — Intersection d'un tore d'axe vertical et du cylindre de bout passant par une des génératrices méridiennes. Nature de la projection horizontale.

192. — On donne une sphère tangente au plan horizontal, une droite du plan horizontal, une seconde droite tangente au contour apparent horizontal de la sphère et dans le plan de ce contour apparent. Intersection de la sphère avec l'hyperboloïde engendré par la seconde droite tournant autour de la première.

193. — On donne le cône asymptote et un plan tangent d'un hyperboloïde; trouver la section de la surface par un plan quelconque.

194. — On donne une droite verticale (A, A') et deux droites quelconques (B, B'), (C, C'). On considère l'hyperboloïde défini par ces trois droites et le paraboloïde qui a pour plan directeur le plan horizontal et pour directrices (A, A') et (B, B'). Intersection de ces deux surfaces.

195. — On donne un paraboloïde hyperbolique défini par deux génératrices et un plan directeur (le plan horizontal). Lieu des milieux des génératrices limitées aux deux droites données.

196. — Intersection de deux cylindres déterminés par leurs bases et la direction de leurs génératrices. Chacune des bases est donnée par sa projection horizontale et les projections de deux droites situées dans son plan.

197. — On donne deux cercles dans des plans horizontaux différents, et on considère une verticale rencontrant ces deux cercles. Démontrer que les deux cercles et la droite définissent un hyperboloïde. On donne un point (m, m') sur la génératrice verticale; trouver la deuxième génératrice passant par ce point.

198. — On donne une parabole dans le plan horizontal, et une droite dans le plan vertical. Construire le cône de révolution qui a pour base cette parabole et la projection verticale de son axe parallèle à la droite donnée.

199. — Intersection d'une droite et d'un paraboloïde de révolution dont l'axe est de front.

200. — Une parabole située dans le plan horizontal est la directrice d'un cylindre dont on donne la direction des génératrices. On coupe ce cylindre par un plan parallèle à la ligne de terre. Sommet de la parabole section.

CONCOURS DE 1890 *(Suite)*.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (Épreuves définitives).

Calcul.

84. — x et y étant les coordonnées d'un point d'un plan, tracer la courbe définie par l'équation

$$y = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right)}{\operatorname{tg} x}.$$

Déterminer :

1° Les coordonnées des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des x;

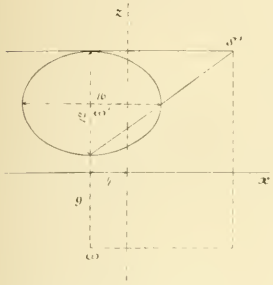
2° Les coordonnées des autres points où ces tangentes rencontrent la courbe.

(On donnera les résultats avec toute la précision que comporte l'emploi des tables de logarithmes à sept décimales.)

(17 août, de 7 h. à midi.)

Géométrie descriptive.

85. — Représenter le solide commun à un ellipsoïde de révolution et à un cône de révolution.



Données :

Ellipsoïde. — Son centre a pour coordonnées

$$x = -4^{cm}, \qquad y = 9^{cm}, \qquad z = 8^{cm}.$$

L'axe de révolution est vertical et il a pour longueur $2b = 12^{cm}$; le diamètre de l'équateur a pour longueur $2a = 16^{cm}$.

Cône. — Son axe est dans le plan de front qui passe par l'axe de l'ellipsoïde.

Les génératrices situées dans ce plan sont :

1° La tangente au point le plus haut de l'ellipse méridienne de l'ellipsoïde;

2° La droite qui joint le sommet le plus bas de cette méridienne au sommet le plus à droite.

L'angle au sommet du cône est l'angle aigu formé par ces deux génératrices.

Nota. — On placera la ligne de terre parallèlement aux plus petits côtés de la feuille et à égale distance de chacun d'eux.

Les candidats joindront à l'épure, sur une feuille séparée, une légende expliquant les constructions employées.

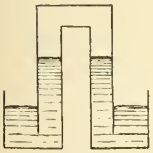
(18 août, de 7 h. à midi.)

CONCOURS DE 1891

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Physique.

I. — Chaleur spécifique des gaz.



II. **86.** — A l'intérieur d'un vase cylindrique en forme de cloche, fixé à sa partie supérieure, flotte un cylindre semblable dont le bord est relevé en forme de gouttière; l'espace compris entre les deux cylindres est rempli partie par de l'air, partie par du mercure; et le système se trouve ainsi en équilibre pour une pression atmosphérique donnée.

Quel sera l'effet produit par une variation de la pression extérieure, et comment pourrait-on faire de l'appareil un baromètre inscripteur?

III. **87.** — Démontrer que si on observe l'image d'un objet donné par un système optique quelconque symétrique autour d'un axe, le grossissement reste le même quand, le système demeurant fixe, on échange les positions de l'œil et de l'objet.

(27 mai, de 10 h. à 4 h. 1/2.)

Chimie.

I. — Analogies et différences physiques et chimiques du brome et de l'iode. — Leurs principaux composés.

II. **88.** — On chauffe $12^{gr},400$ de phosphore avec un excès d'hydrate de baryte dissous dans l'eau. On admet qu'il ne se produit ni hydrogène libre, ni acide phosphorique et que le gaz dégagé se compose de $\frac{9}{10}$ de phosphure d'hydrogène gazeux et de $\frac{1}{10}$ de vapeurs d'hydrogène phosphoré liquide. Après dissolution du phosphore, le liquide est traité par un courant d'acide carbonique en excès et filtré. A cette dissolution on ajoute de l'acide sulfurique dilué tant qu'il se forme un précipité; on filtre de nouveau, on lave et on sèche le précipité. Dans la dernière liqueur filtrée on fait passer un courant de chlore en excès, puis on évapore et on calcine en s'arrêtant avant la volatilisation du produit solide.

On demande :

1° Le poids du précipité donné par l'acide sulfurique;

2° La nature et le poids du produit contenu dans le liquide séparé de ce précipité;

3° Le poids de chlore utilisé par cette dissolution:

4° La nature et le poids du produit obtenu après évaporation et calcination.

On donne l'équivalent du baryum : Ba = 68,5.

(29 mai, de 10 heures à 1 h. 1/2.)

QUESTIONS PROPOSÉES

89. — Un cercle de rayon R est tangent à une ellipse donnée à l'extrémité du grand axe. Trouver une équation qui donne la distance d'un des foyers au point où la tangente commune aux deux courbes rencontre le grand axe.

(R. Gilbert, lycée Janson-de-Sailly.)

90. — On donne deux points fixes A et B. De A et B comme centres, on décrit deux cercles, l'un de rayon constant, l'autre de rayon variable. Le lieu des points de contact des tangentes communes avec le cercle variable se compose de deux *limaçons de Pascal.*

(Capitaine E. N. Barisien.)

91. — On donne deux points fixes A et B. De A et B comme centres on décrit deux cercles variables, mais tangents entre eux. Le lieu des points de contact des tangentes communes aux deux cercles est un *limaçon de Pascal.*

(E. N. Barisien.)

92. — En un point A de la circonférence d'un cercle donné on décrit un cercle quelconque tangent au premier. Si on fait varier le rayon de ce second cercle, le lieu des points de contact sur le cercle variable des tangentes communes au cercle fixe et au cercle variable est une *cissoïde.*

(E. N. Barisien.)

93. — D'un point M d'une lemniscate on peut mener quatre tangentes à cette courbe, outre celle qui touche la courbe en M. Prouver que les quatre points de contact de ces tangentes sont sur une ligne droite, et chercher l'enveloppe de cette droite quand le point M décrit la lemniscate.

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 42174-5-91.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1891).

Questions d'Algèbre.

94. — *Etudier les variations de la fonction*

$$y = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1}}.$$

Construire la courbe dans le cas où $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Nous supposerons le radical pris avec le signe $+$; il est clair que si nous connaissons les variations de y dans cette hypothèse, nous en conclurons sans difficulté les variations de cette fonction, le radical étant supposé précédé du signe $-$.

Écartons d'abord le cas où l'angle donné φ serait égal à $k\pi$, k étant entier: l'étude proposée reviendrait alors à celle des variations de

$$y = \frac{2(x-1)^2}{\varepsilon(2x \pm 1)},$$

ε désignant $+1$ si $2x \pm 1$ est positif, et -1 si ce binome est négatif; la question devient alors tout à fait élémentaire et n'exige pas l'emploi des dérivées. Les courbes qui figurent la variation sont des hyperboles ayant une asymptote parallèle à l'axe des y et l'autre parallèle à l'une des bissectrices des angles formés par les axes de coordonnées.

Dans le cas général, le trinome $4x^2 - 4x\cos\varphi + 1$, placé sous le radical, ne peut s'annuler pour aucune valeur de x, puisque $4(\cos^2\varphi - 1)$ est négatif; ce trinome est donc positif, comme son premier terme, pour toutes les valeurs de la variable. Il résulte de là que la fonction proposée est réelle et finie pour toutes les valeurs données à x; de plus elle est continue pour toutes ces valeurs, puisqu'elle est le quotient de deux fonctions continues et que son dénominateur ne peut s'annuler. Enfin on voit immédiatement que la valeur de y est toujours positive, sauf pour $x = 1$, valeur pour laquelle la valeur de y est nulle; c'est donc un minimum.

Cherchons les valeurs que prend y pour $x = \pm\infty$; mettons, pour cela, la fonction proposée sous la forme

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 2}{\sqrt{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{\varepsilon\sqrt{4 - \frac{4\cos\varphi}{x} + \frac{1}{x^2}}}.$$

ε désignant $+1$ ou -1 suivant que la variable x reçoit des valeurs positives ou des valeurs négatives. On voit que si la valeur absolue de x croît sans limite, le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers zéro. Ainsi y croît sans limite.

De ce qui précède il résulte que la variable x croissant de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction y part de $+\infty$ et revient à $+\infty$ après avoir passé par un minimum au moins égal à zéro et atteint pour $x = 1$.

Pour compléter cette étude sommaire, calculons la fonction dérivée de y ; nous obtenons

$$y' = \frac{4(x-1)\sqrt{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1} - 2(x-1)^2 \dfrac{4x - 2\cos\varphi}{\sqrt{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1}}}{4x^2 - 4x\cos\varphi + 1}$$

ou bien, après réductions,

$$y' = \frac{4(x-1)[2x^2 - (3\cos\varphi - 2)x + 1 - \cos\varphi]}{(4x^2 - 4x\cos\varphi + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette dérivée est réelle, finie, continue et bien déterminée pour toutes les valeurs de x; le dénominateur est toujours positif, de sorte que y' a constamment le signe du numérateur. Désignons par $\varphi(x)$ la quantité placée entre crochets :

$$\varphi(x) = 2x^2 - (3\cos\varphi - 2)x + 1 - \cos\varphi.$$

C'est un trinome du second degré qui ne peut s'annuler que si l'on a

$$(3\cos\varphi - 2)^2 - 8(1 - \cos\varphi) \geqslant 0$$

ou bien

$$9\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 4 \geqslant 0. \qquad \text{(A)}$$

Or cette condition n'est pas remplie pour toutes les valeurs de l'angle φ : car l'équation

$$f(\cos\varphi) = 9\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 4 = 0,$$

dans laquelle nous regardons $\cos\varphi$ comme une inconnue, a ses racines réelles et de signes différents puisque leur produit $-\frac{4}{9}$ est négatif; de plus, elles sont comprises entre -1 et $+1$: en effet $+1$ surpasse évidemment la racine négative; il surpasse aussi la racine positive puisque $f(1) = 9 - 4 - 4 = 1$, nombre positif; on voit de même que -1 est inférieur à la racine positive et aussi à la racine négative puisque $f(-1) = 9 + 4 - 4 = 9$, nombre positif. Appelons $\cos\alpha$ la racine positive et $\cos\beta$ la racine négative; nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}, \qquad \cos\beta = \frac{2 - 2\sqrt{10}}{9}.$$

Nous avons deux cas à distinguer :

1° Si $\cos\varphi$ est compris entre $\cos\alpha$ et $\cos\beta$, la condition (A) n'est pas satisfaite; l'équation $\varphi(x) = 0$ a donc ses racines imaginaires et le trinome $\varphi(x)$ est positif pour toutes les valeurs de x. La fonction dérivée y' a donc le signe du facteur $x - 1$, c'est-à-dire qu'elle est négative tant que x est inférieur à 1, nulle pour $x = 1$ et positive pour $x > 1$. Il en résulte que la fonction proposée y décroît constamment de l'infini à zéro quand x croît de $-\infty$ à 1, puis croît constamment de zéro à l'infini quand x croît de 1 à $+\infty$.

2° Si $\cos\varphi$ n'est pas compris dans l'intervalle de $\cos\alpha$ à $\cos\beta$, c'est-à-dire si l'on a

$$\cos\alpha < \cos\varphi < 1$$

ou bien

$$\cos\beta > \cos\varphi > -1,$$

la condition (A) est satisfaite, et le trinome $\varphi(x)$ change deux fois de signe quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$. Les valeurs de x pour lesquelles ces changements de signe se présentent sont

$$x_1 = \frac{3\cos\varphi - 2 - \sqrt{9\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 4}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3\cos\varphi - 2 + \sqrt{9\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 4}}{4}.$$

Ces valeurs ont toujours le même signe puisque leur produit $\frac{1 - \cos\varphi}{2}$ est positif; elles sont positives si $\cos\varphi$ surpasse $\frac{2}{3}$, ce qui arrive quand $\cos\varphi$ est compris entre $\cos\alpha$ et 1; elles sont négatives

quand $\cos\varphi$ est compris entre $\cos\beta$ et -1. Dans tous les cas elles sont inférieures à 1 : car

$$\varphi(1) = 2 - (3\cos\varphi - 2) + 1 - \cos\varphi = 5 - 4\cos\varphi,$$

nombre positif; ainsi 1 ne peut pas être compris entre les valeurs de x_1 et x_2; de plus, ces valeurs ne peuvent pas surpasser 1 puisque leur produit est évidemment inférieur à 1; elles sont donc toutes deux plus petites que l'unité.

x	y'	y
$-\infty$		$+\infty$
	$-$	décroît
x_1	0	minimum
	$+$	croît
x_2	0	maximum
	$-$	décroît
1	0	minimum
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

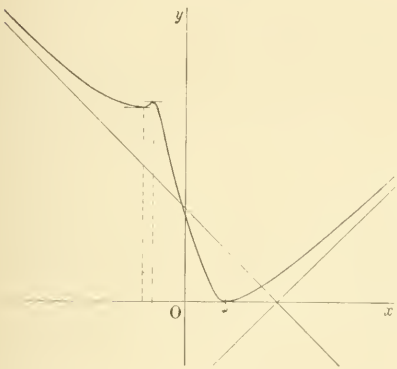
Suivant que x est ou n'est pas compris dans l'intervalle de x_1 à x_2, le trinome $\varphi(x)$ est négatif ou positif.

Pour suivre aisément les variations de y, faisons un tableau divisé en trois colonnes; inscrivons dans la première les valeurs remarquables de x rangées par ordre de grandeur; dans la deuxième, mettons les signes de la fonction dérivée y'; la connaissance de ces signes nous permettra d'inscrire dans la troisième colonne les variations de la fonction proposée.

Dans le cas où $\cos\varphi$ serait égal soit à $\cos\alpha$ soit à $\cos\beta$, les valeurs de x_1 et x_2 deviendraient égales et le trinome $\varphi(x)$ s'annulerait *sans changer de signe* pour $x = x_1 = x_2$; la fonction y serait alors constamment décroissante, x variant de $-\infty$ à 1.

Construction de la courbe pour le cas où $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. — En ce cas $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$ et la fonction devient

$$y = \frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$



Le nombre $-\frac{1}{2}$ n'étant pas compris entre $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ puisque

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} + \frac{4}{2} - 4 = \frac{1}{4}$$

nombre positif, nous sommes dans le second cas examiné plus haut; les valeurs de x_1 et de x_2 sont les racines de l'équation

$$2x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$

ou bien $$4x^2 + 7x + 3 = 0.$$

Ces valeurs sont donc $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{3}{4}$.

La première correspond à un minimum égal à $\frac{8}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ou 4,6188.....

La seconde correspond à un maximum égal à $\frac{49}{4\sqrt{7}}$ ou $\frac{7\sqrt{7}}{4}$ ou 4,6300.....

(Les valeurs décimales sont approchées par défaut à moins de 0,0001.)

Asymptotes. — Cherchons les équations des asymptotes. Leurs coefficients angulaires sont les limites, pour x infini, du rapport $\frac{y}{x}$.

Or, $$\frac{y}{x} = \frac{2x - 4 + \frac{2}{x}}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{\varepsilon\sqrt{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}},$$

ε désignant $+1$ ou -1 suivant que x est positif ou négatif. Faisons croître indéfiniment la valeur absolue de x; on voit que pour x positif, la limite de $\frac{y}{x}$ est $+1$; cette limite est -1 pour x négatif. Ainsi la courbe a deux asymptotes parallèles aux bissectrices des angles des axes.

L'ordonnée a l'origine de l'asymptote dont le coefficient angulaire est $+1$ est la limite pour x infini et positif de la différence $y-x$; on a

$$y-x=\frac{2x^2-4x+2-x\sqrt{4x^2+2x+1}}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\frac{(2x^2-4x+2)^2-x^2(4x^2+2x+1)}{(2x^2-4x+2+x\sqrt{4x^2+2x+1})\sqrt{4x^2+2x+1}}$$

ou, après simplifications, $y-x=\dfrac{-18x^3+23x^2-16x+4}{4x^3+2x^2+x+(2x^2-4x+2)\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Si l'on divise haut et bas par x^3, puis que l'on fasse croître x au delà de toute limite, on trouvera

$$\lim(y-x)=-\frac{18}{8}=-\frac{9}{4}.$$

L'équation de cette asymptote est donc $y=x-\frac{9}{4}$.

La seconde asymptote a pour ordonnée à l'origine la limite pour x infini et négatif de $y+x$, ou bien si l'on pose

$$x=-x',$$

la limite pour x' infini et positif de $y-x'$. Or

$$y-x'=\frac{2x'^2+4x'+2-x'\sqrt{4x'^2-2x'+1}}{\sqrt{4x'^2-2x'+1}};$$

un calcul semblable au précédent donne pour limite de $y-x'$ le nombre $\frac{9}{4}$; l'équation de cette asymptote est donc

$$y=-x+\frac{9}{4}.$$

Ces deux droites sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des abscisses; on pouvait le prévoir à cause de la symétrie de la courbe *complète* par rapport à cet axe.

Cherchons si les asymptotes rencontrent la courbe à distance finie; les abscisses des points communs à la première asymptote et à la courbe sont les racines de l'équation

$$x-\frac{9}{4}=\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$

Pour la résoudre nous devons élever les deux membres au carré, de sorte que les points trouvés pourront être sur la partie de la courbe complète située du côté des y négatives aussi bien que sur l'autre. Cette équation du quatrième degré admet, comme on pouvait s'y attendre, deux racines infinies, et en outre les racines de l'équation du second degré

$$188x^2-346x-17=0.$$

Leurs valeurs sont à moins de un dix-millième

$$1{,}8883 \quad \text{et} \quad -0{,}0478.$$

Les points communs à la seconde asymptote et à la courbe ont évidemment les mêmes abscisses.

Points d'inflexion. — La seconde dérivée de la fonction y a pour valeur

$$y''=\frac{8(3\cos^2\varphi-8\cos\varphi+7)x^2+16(\cos^2\varphi-5\cos\varphi+3)x+4(6\cos^2\varphi-4\cos\varphi-1)}{(4x^2-4x\cos\varphi+1)^2}.$$

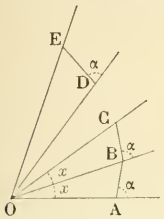
Dans le cas particulier où $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, le numérateur de cette fonction est le double du trinome

$$47x^2 + 46x + 5,$$

qui s'annule pour deux valeurs de x, l'une comprise entre -1 et $-\frac{3}{4}$, l'autre entre $-\frac{3}{4}$ et zéro. La concavité de la courbe est tournée du côté des y positives sauf le petit arc formé par les points dont les abscisses sont comprises entre ces deux valeurs de x qui sont les abscisses de deux points d'inflexion.

---

95. — *Étant donné un angle* AOE *égal à* φ, *on le partage en* n *parties égales. Sur l'un des côtés* OA *on prend une longueur égale à l'unité et on fait en* A *avec la direction* OA *un angle égal à un autre angle donné* α; *la droite ainsi tracée rencontre en* B *la direction* OB *qui fait avec* OA *l'angle* $\frac{\varphi}{n}$; *on trace la droite qui, partant de* B, *fait avec* OB *l'angle* α *jusqu'à sa rencontre en* C *avec la direction qui fait avec* OA *l'angle* $\frac{2\varphi}{n}$. *On continue ainsi jusqu'au second côté de l'angle* φ. *On obtient sur ce côté un segment* OE *dont on demande la limite quand* n *croît indéfiniment.*



Posons $\frac{\varphi}{n} = x$, d'où $n = \frac{\varphi}{x}$.

Le triangle OAB donne $\frac{OB}{OA} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - x)}$.

Le triangle OBC semblable au précédent donne

$$\frac{OC}{OB} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - x)},$$

et ainsi de suite. Si OE est le dernier rayon et OD l'avant-dernier, on a

$$\frac{OE}{OD} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - x)};$$

en égalant le produit des premiers membres au produit des seconds membres, on obtient

$$\frac{OE}{OA} = \left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - x)}\right]^n = \left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - x)}\right]^{\frac{\varphi}{x}}.$$

Cette expression prend pour $x = 0$ la forme 1^∞. Pour trouver la limite vers laquelle elle peut tendre, désignons-la par y et prenons le logarithme népérien de y.

$$Ly = \varphi\,\frac{L\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - x)}}{x}.$$

Les deux termes de la fraction tendent simultanément vers zéro; nous pouvons donc appliquer la règle de L'Hospital; la dérivée du dénominateur étant l'unité, il suffit de prendre la dérivée du numérateur; nous trouvons

$$\frac{\sin(\alpha - x)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha\cos(\alpha - x)}{\sin^2(\alpha - x)} = \operatorname{cotg}(\alpha - x).$$

La limite de cette quantité est $\operatorname{cotg}\alpha$, et celle de Ly est $\varphi\operatorname{cotg}\alpha$. Il en résulte que la limite de OE est

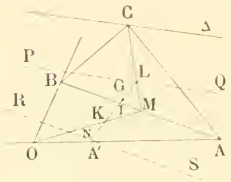
$$e^{\varphi\operatorname{cotg}\alpha}.$$

E. Dessenon.

[MM. A. Audouin (lycée de Cherbourg) et R. de Neyrieu (lycée de Lyon), ont envoyé de bonnes solutions des questions 94 et 95.]

GÉOMÉTRIE

Solution géométrique de la question **42**. — Le centre de gravité du quadrilatère OACB se trouve en un point G de KL tel que l'on ait KI = GL. Or le lieu du point L est une parallèle PQ à la droite Δ, aisée à déterminer.



Prolongeons IK d'une longueur KN = KI; le lieu du point N est une parallèle RS à la droite AB, coupant OA au point A′ tel que $OA' = \frac{1}{3} OA$; et comme on a KN = GL, on voit que le lieu du point G est l'hyperbole qui a pour asymptotes PQ et RS, et qui passe par le point K.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Démonstration d'un théorème de Joachimsthal.

Soit A (x_1, y_1) un point d'une ellipse rapportée à ses axes de symétrie et définie par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; désignons par (α, β) les coordonnées d'un point P pris sur la normale en A à l'ellipse donnée. Du point P partent quatre normales à l'ellipse, ayant pour pieds les points A, B, C, D. Si l'on désigne par (x, y) les coordonnées de l'un quelconque des points B, C, D, on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

d'où

$$\frac{x^2 - x_1^2}{a^2} = -\frac{y^2 - y_1^2}{b^2}. \tag{1}$$

D'autre part, le pied de l'une quelconque des normales considérées étant sur l'hyperbole d'Apollonius relative au point P, on a aussi

$$b^2 + \frac{a^2\alpha}{x} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y},$$

$$b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_1} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_1},$$

d'où, en retranchant membre à membre :

$$\frac{a^2\alpha(x - x_1)}{xx_1} = \frac{b^2\beta(y - y_1)}{yy_1}. \tag{2}$$

En divisant membre à membre les équations (1) et (2), on obtient l'équation

$$\frac{xx_1(x + x_1)}{a^4\alpha} + \frac{yy_1(y + y_1)}{b^4\beta} = 0, \tag{3}$$

qui représente une conique passant par les points B, C, D et par le point A′ diamétralement opposé au point A.

En posant $b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_1} = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_1} = h$, l'équation (3) prend la forme suivante :

$$\frac{x(x + x_1)}{a^2}(h - a^2) + \frac{y(y + y_1)}{b^2}(h - b^2) = 0. \qquad (4)$$

Cette équation représente une conique ayant ses axes parallèles à ceux de l'ellipse donnée et, par suite, les coupant en quatre points situés sur un cercle, ce qui démontre le théorème de Joachimsthal. Nous nous proposons d'obtenir l'équation de ce cercle. Cette équation est de la forme

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{x(x + x_1)}{a^2}(h - a^2) + \frac{y(y + y_1)}{b^2}(h - b^2) = 0.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut et il suffit que λ vérifie l'équation

$$\frac{\lambda + h}{a^2} = \frac{\lambda + h}{b^2}, \quad \text{ce qui donne} \quad \lambda = -h.$$

L'équation du cercle de Joachimsthal est donc la suivante :

$$x^2 + y^2 + xx_1 + yy_1 = h\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1\right).$$

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement que ce cercle passe par le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente au point A', puisque $x^2 + y^2 + xx_1 + yy_1 = 0$ est l'équation du cercle décrit par OA' comme diamètre, et $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1 = 0$, celle de la tangente en A' à l'ellipse donnée. (B. N.)

61. — *On donne une parabole rapportée à deux axes rectangulaires* Ox *et* Oy ; *cette parabole a son axe parallèle à l'axe des* y, *elle passe par l'origine et le point de l'axe des* x *dont l'abscisse est* l, *enfin elle admet une ordonnée maxima égale à* f.

On donne, en outre, une droite passant par l'origine et un point A ($x = l$, $y = h$).

1° Démontrer que, si, pour une abscisse déterminée, on porte en ordonnée la somme algébrique de l'ordonnée de la droite et de celle de la parabole correspondantes à cette abscisse, l'extrémité de cette ordonnée est sur une parabole (P) *égale à la première.*

2° Démontrer que les axes des coniques qui passent par l'intersection d'un cercle et d'une conique sont parallèles aux axes de celle-ci.

3° Une circonférence de cercle décrite sur OA *comme diamètre coupant la parabole* (P) *en quatre points,* O, A, B, C, *chercher le lieu du point d'intersection des sécantes communes* OA, BC *quand on fait varier* h, *et construire ce lieu, qui n'est pas du deuxième degré.*

4° Chercher la valeur du rapport $\frac{l}{f}$ *pour laquelle le cercle décrit sur* OA *comme diamètre est tangent à la parabole, quel que soit* h.

(École centrale, 1890, 2me session.)

1. — L'équation de la parabole donnée est de la forme

$$y = \lambda x(x - l),$$

avec la condition que pour $x = \frac{l}{2}$, on ait $y = f$.

On obtient ainsi $\lambda = -\frac{4f}{l^2}$;

d'où l'équation $$y = \frac{4f}{l^2}x(l - x). \qquad (1)$$

La droite OA a pour équation $$y = \frac{hx}{l}.$$

En écrivant que l'ordonnée d'un point est égale à la somme algébrique des ordonnées de la parabole et de la droite précédentes qui correspondent à une abscisse x, on obtient l'équation

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x) + \frac{hx}{l}, \qquad (2)$$

qui représente une parabole dont l'axe est parallèle à Oy; je dis qu'elle a même paramètre que la parabole donnée.

En effet, soit l'équation d'une parabole

$$y = ax^2 + bx + c.$$

On peut l'écrire $$y = a\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point $x = -\frac{b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$; l'équation devient

$$y = ax^2,$$

ce qui montre que le paramètre de la parabole est la valeur absolue de $\frac{1}{2a}$.

Comme dans les seconds membres des équations (1) et (2), le coefficient de x^2 a la même valeur, les deux paraboles ont même paramètre, qui est égal à $\frac{l^2}{8f}$.

2. — Considérons une conique (S) et un cercle (C) et supposons les axes coordonnés parallèles aux axes de (S); dans le cas où (S) est une parabole on supposera l'axe de cette parabole parallèle à l'un des axes coordonnés. Les courbes (S) et (C) étant représentées par les équations

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + \ldots = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2ax + \ldots = 0,$$

l'équation générale des coniques passant par les points communs à (S) et à (C) est.

$$(A + \lambda)x^2 + (C + \lambda)y^2 + \ldots = 0.$$

L'absence du terme en xy montre bien que les axes de cette conique sont parallèles aux axes coordonnés et, par suite, aux axes de la conique (S).

Supposons que la conique et le cercle se coupent en quatre points O, A, B, C; les droites OA, BC forment une conique passant par les points communs aux deux premières. Les bissectrices des angles formés par OA et BC sont les axes de cette conique particulière; elles sont parallèles aux axes de la conique (S) et, par suite, les droites OA, BC sont également inclinées sur les axes de (S).

3. — L'équation de la parabole (P) peut s'écrire

$$P = 4fx^2 - l(4f + h)x + l^2y = 0,$$

celle du cercle décrit sur OA comme diamètre est

$$S = x^2 + y^2 - lx - hy = 0.$$

Pour obtenir l'équation de la droite BC, il suffit de trouver un nombre λ tel que $P + \lambda S$ soit décomposable en un produit de deux facteurs dont l'un soit $hx - ly$; en égalant à zéro le second facteur on aura l'équation de BC. Mais les droites BC et OA sont également inclinées sur l'axe de la parabole (P), par suite, le premier membre de l'équation de BC aura la forme $hx + ly + k$; par suite, les termes du deuxième degré de $P + \lambda S$ doivent être proportionnels à $h^2x^2 - l^2y^2$.

En formant la combinaison $\frac{l^2 + h^2}{4f} P - l^2 S$, on voit que les termes du deuxième degré sont $h^2x^2 - l^2y^2$, et l'on a l'identité

$$\frac{l^2 + h^2}{4f} P - l^2 S \equiv h^2x^2 - l^2y^2 - \frac{l}{4f}(l^2 + h^2 + 4fh)(hx - ly).$$

Supprimant le facteur $hx - ly$, on obtient l'équation de BC

$$hx + ly - \frac{l}{4f}(l^2 + h^2 + 4fh) = 0. \qquad (3)$$

Le lieu du point de rencontre de BC et de OA s'obtient en tirant h de l'équation de OA, $h = \frac{ly}{x}$, et remplaçant dans (3); on obtient ainsi

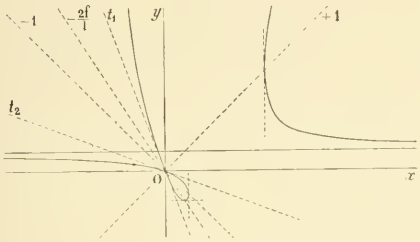
$$8fx^2y - l^2(x^2 + y^2) - 4flxy = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du troisième degré, qui a un point double à l'origine, des branches paraboliques parallèles à Oy et une asymptote parallèle à Ox. Pour la construire nous poserons $y = tx$.

On obtient $\qquad x = \frac{l^2t^2 + 4flt + l^2}{8flt}, \qquad y = \frac{l^2t^2 + 4flt + l^2}{8f};$

et $\qquad x'_t = \frac{l^2(t^2 - 1)}{8flt^2}, \qquad y'_t = \frac{l(lt + 2f)}{4f}.$

Les valeurs remarquables de t sont ± 1, $-\frac{2f}{l}$ et les racines du trinome $l^2t^2 + 4flt + l^2$ qui ne sont réelles que si $4f^2 - l^2 > 0$, ou si $2f > l$, puisque f et l sont positifs. Il y a donc trois cas à examiner.



Premier cas. $2f > l$. — Si t_1 et t_2 sont les racines du trinome, on voit que ces racines sont négatives et inverses l'une de l'autre et l'on constate aisément qu'on a l'ordre de grandeur suivant :

$$t_1 < -\frac{2f}{l} < -1 < t_2 < 0 < +1;$$

on en déduit le tableau de variation

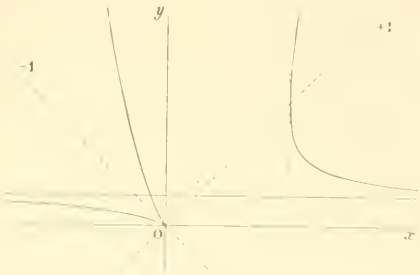
t	$-\infty$		t_1		$-\frac{2f}{l}$		-1		t_2		0		$+1$		$+\infty$
x'_t		+		+		+	0	−		−		−	0	+	
y'_t		−		−	0	+		+		+		+		+	
x	$-\infty$	croît	0		croît		Max.	décroît	0	décroît	$-\infty$ | $+\infty$	décroît	min.	croît	$+\infty$
y	$+\infty$	décroît	0	décroît	min.			croît	0	croît	$\frac{l^2}{8f}$		croît		$+\infty$

Deuxième cas. $2f = l$. Les racines du trinome sont égales à -1, les quatre valeurs remarquables négatives du tableau précédent sont égales à -1; l'origine est un point de rebroussement.

Troisième cas. $2f < l$. Les racines du trinome sont imaginaires; on forme aisément un tableau de valeurs analogue au précédent.

On a un point double isolé à l'origine. Observons que $-\frac{2f}{l} > -1$.

Le point M correspondant à $t = -1$ est situé au-dessus de l'asymptote si $4f > l$, et au-dessous si $4f < l$.



Deuxième cas.

Troisième cas.

4. — Pour que le cercle et la parabole soient tangents, il faut, ou bien que les deux sécantes communes se coupent sur l'une des courbes, ou bien que l'une des sécantes soit tangente à l'une des courbes. En écrivant que BC passe par le point O, ou le point A, on trouve une condition qui ne peut être remplie quel que soit h.

D'autre part OA ne peut être tangente au cercle, donc tout revient à écrire que BC est tangente à l'une des courbes, au cercle par exemple. Formons pour cela l'équation des droites joignant l'origine aux points de rencontre du cercle et de BC; on obtient

$$\frac{x^2 + y^2}{4f(hx + ly)} = \frac{lx + hy}{l(l^2 + h^2 + 4fh)},$$

qui se réduit à

$$lx^2 - 4fxy + ly^2 = 0;$$

et ces droites sont confondues si

$$\frac{l}{f} = \frac{1}{2}.$$

R. Lévy, lycée Janson de Sailly.

(Autres solutions par MM. Auzeram (lycée de Toulouse) et E. Jassiner (lycée de Troyes).

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

62. — Intersection de deux cones de révolution. — *La ligne de rappel* oo′ *du centre du cercle de base du premier cône est à égale distance des grands côtés du cadre. La cote du point* (o,o′) *est de* 100^{mm} *et son éloignement de* 93^{mm}. *La ligne de rappel* ss′ *du sommet du premier cône est à* 87^{mm} *de* oo′ *vers la droite. La cote du point* (s, s′) *est* 210^{mm} *et son éloignement* 162^{mm}. *Le rayon du cercle de base est de* 80^{mm}.

On prend le diamètre horizontal de ce cercle de base et on fait tourner de 90° *le premier cône autour de cette horizontale, de manière que la cote du sommet reste supérieure à celle du centre de la base; on a ainsi le second cône.*

On demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble des deux cônes

supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base. On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour placer les données et pour déterminer :

1° Un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points;

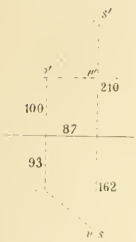
2° Un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point :

3° Les génératrices de contour apparent des deux cônes et les points des bases et de l'intersection situés sur ces génératrices. On n'indiquera pas d'autre construction.

(École Centrale, 2e session, 1890.)

Les deux cônes étant circonscrits à une même sphère, leurs surfaces latérales, supposées prolongées indéfiniment, se coupent suivant deux coniques qui se projettent sur le plan des axes suivant deux portions de droite.

En prenant pour nouvelle ligne de terre l'horizontale $x_1\ y_1$ qui passe par le point o, o' et qui se projette horizontalement suivant os, les deux cônes sont représentés, en projection verticale, par les deux triangles $s''c''d''$, $s''_1c''_1d''_1$, et les courbes communes à leurs surfaces latérales par les portions oe'' et $i''k''$ des deux diagonales du quadrilatère formé par les projections verticales des quatre génératrices méridiennes.



Or, le point s, s' est à 110^{mm} au-dessus du plan horizontal du point o, o', et la verticale du point s, s' perce ce plan horizontal en un point v, v' dont la distance au point o, o' est égale à $\sqrt{(162-93)^2+87^2}$, c'est-à-dire à $111^{mm},04$. Le triangle SOV est donc très sensiblement isocèle : la droite SO fait avec le plan horizontal un angle qui ne diffère de 45° que de 16′ 10″. Si l'on suppose que cet angle est rigoureusement égal à 45°, le second cône est le symétrique du premier par rapport au plan vertical P qui passe par le diamètre horizontal commun aux deux cercles de base, et ces cercles ont des projections horizontales qui coïncident.

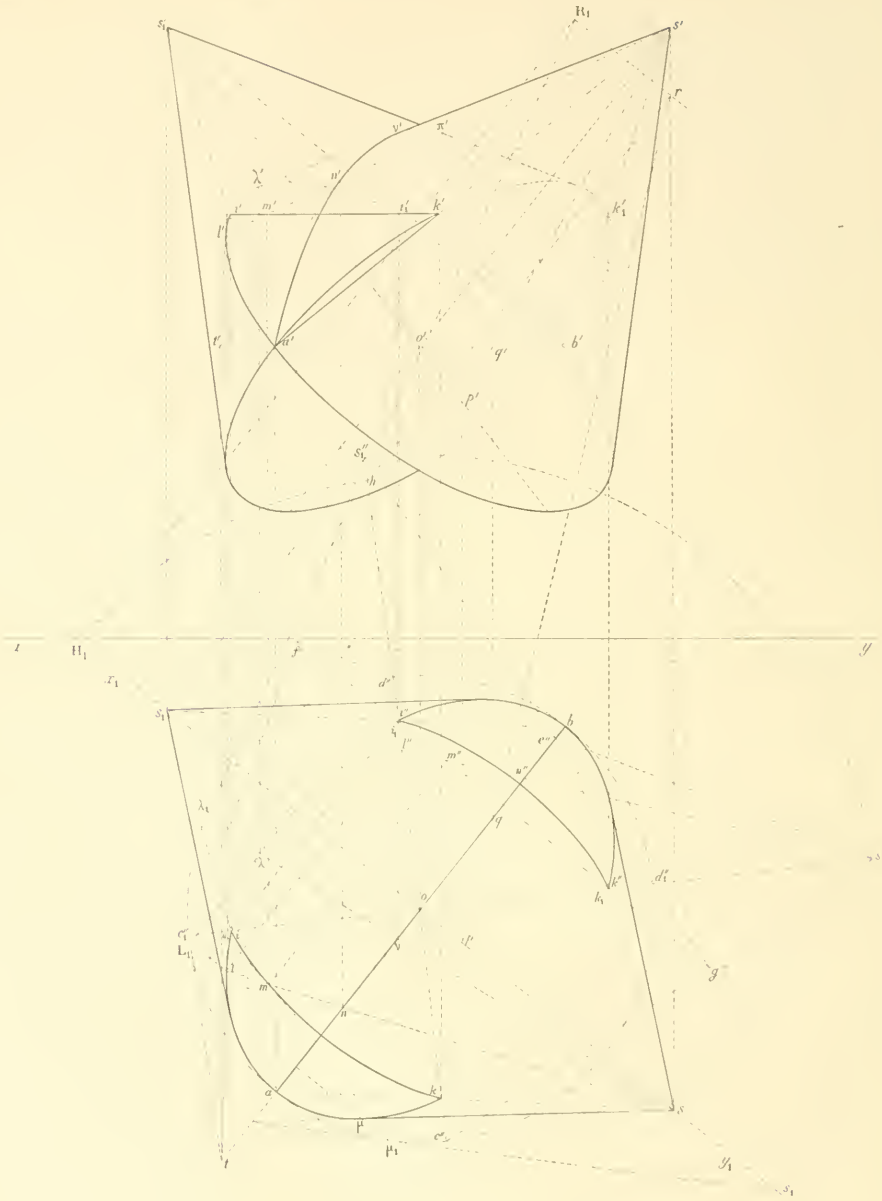
Avec les données de l'épure, au contraire, le plan vertical P n'est pas un plan de symétrie et les projections horizontales des deux bases sont différentes; mais ces projections sont si voisines l'une de l'autre que deux tracés distincts sont impossibles. En outre, les deux coniques communes aux deux surfaces sont l'une dans un plan si voisin d'un plan vertical et l'autre dans un plan si voisin d'un plan horizontal, que la projection horizontale de la première et la projection verticale de la seconde, projections qui théoriquement sont des ellipses, se confondent, dans le tracé, chacune avec une portion de droite.

Nous ne pouvons donc obtenir un dessin rigoureusement exact; aussi préférons-nous modifier légèrement les données et nous placer nettement dans le cas auquel correspond forcément le dessin exécuté d'après les données non modifiées, c'est-à-dire dans le cas où la droite SO fait un angle de 45° avec le plan horizontal. Les projections des cercles de base sont alors deux ellipses rigoureusement confondues et les courbes communes aux deux surfaces coniques sont l'une dans un plan vertical et l'autre dans un plan horizontal.

1° Pour avoir un point quelconque de l'une des bases, par exemple de celle qui a $c''d''$ pour projection verticale auxiliaire, on rabat cette base sur le plan horizontal du point o, o', on prend un point quelconque L_1 sur son rabattement et on relève ce point en l, l''. Du point l, l'' on passe facilement au point cherché l, l'. La tangente en ce point s'obtient en le joignant au point t, t' où la tangente en L_1 coupe ab, $a'b'$.

2° La génératrice sl, $s'l'$ perce le second cône en deux points m, m', n, n' qu'on déduit de leurs projections verticales auxiliaires m'', n''. On trouve la tangente en m en joignant ce point au point u où lt rencontre i, i''; quant à la tangente en n', elle passe évidemment par t'.

3° La verticale de s perce le plan de base $c''d''$ en un point symétrique de s'' par rapport à os et dont le rabattement S_1 est par suite le même que celui de s''; la tangente $S_1\ \mu_1$ au cercle o détermine une des


H₁
s₁
s'
r'
π'
n'
k'
k'₁
l'
t'
a'
o'
q'
b'
p'
h
x
y
H₁
f
d''
c''
b
l''
m''
u''
q
λ₁
d'₁
k''
k₁
o
p
m
n
a
k
s
μ
μ₁
t
y₁
s₁
g

génératrices sp du contour apparent horizontal; les trois autres génératrices s'en déduisent par symétrie.

Pour avoir le contour apparent vertical, on cherche d'abord le point r, s' où la droite de bout qui passe par s' rencontre le plan de base du cône s, s'. Ce point r, s' s'obtient en coupant le plan de base par le plan de bout $s'p'q'$. On rabat ensuite le point r, s' en R_1, on mène la tangente $R_1\lambda_1$ au rabattement du cercle de base et on relève cette droite en $s'\lambda'$.

Les autres génératrices du contour apparent s'obtiennent de même.

Les divers points remarquables de l'intersection sont: sur les deux bases les six points (a, a'), (b, b'), (i, i'), (i_1, i'_1), (k, k'), (k_1, k'_1) et sur le contour apparent vertical le point ν, ν' et son symétrique π' par rapport à la verticale de O.

Observons que le plan de base de l'un quelconque des cônes passe par le sommet de l'autre. Il y a donc des proportions de génératrices de chaque cône qui appartiennent à la base de l'autre et qui doivent être regardées comme faisant partie de l'intersection.

Louis Messent.

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École centrale (1890).

1. — La distance des points de contact d'une tangente commune extérieure à deux circonférences est égale à la longueur d'une tangente commune intérieure comprise entre les deux tangentes communes extérieures.

2. — A quelle condition doivent satisfaire les arcs a, b, c pour que l'on ait

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1 ?$$

3. — Les tangentes communes intérieures à deux circonférences rencontrent les tangentes communes extérieures en quatre points situés sur un cercle.

4. — On donne un angle xOy et deux points A et sur Oy; trouver sur Ox un point C tel que l'angle ACB soit maximum.

5. — Maximum et minimum de $x + \frac{p}{x}$.

6. — Le module d'une somme est plus petit que la somme des modules et plus grand que leur différence.

7. — Dérivée de $\operatorname{arc\,sin} \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$. Interpréter le résultat.

8. — Fonction primitive de $\dfrac{3x}{(a + bx^2)^3}$.

9. — Discuter les racines de $x^m + px^{m-1} + q = 0$.

10. — Maximum ou minimum de $\sin(x + a) + \cos(x + b)$.

11. — Fonction primitive de $\dfrac{1}{x \mathrm{L} x}$.

12. — Maximum ou minimum de $yz + zx + xy$, sachant que $x + y + z = a$.

13. — Étant donnée une pyramide triangulaire de base b et de hauteur h, on la coupe en n tranches par des plans parallèles à la base et on forme les prismes ayant pour bases inférieures les différentes sections et pour hauteurs les distances de deux plans sécants voisins. Trouver le volume du premier prisme à partir du sommet. Trouver la somme des volumes de tous ces prismes; limite de cette somme quand n augmente indéfiniment.

14. — Dérivée de $\operatorname{arc\,tg} \dfrac{a + bx}{b - ax}$. Prévoir le résultat.

15. — Sommation d'une pile de boulets triangulaire. Sachant qu'une telle pile contient 171700 boulets, combien y en a-t-il à la base?

(A suivre.)

CONCOURS DE 1891 (*Suite*).

ÉCOLE NAVALE

Géométrie analytique (1).

96. — Étant donné le cercle $x^2 + (y - \gamma)^2 = R^2$, rapporté à des axes rectangulaires Oxy, et qui coupe l'axe des x en deux points A et A', on considère un point quelconque M de ce cercle, défini par l'angle φ que le rayon CM fait avec l'axe des x. Trouver l'équation générale des coniques passant par les points A et A' et tangentes en M à la circonférence C; démontrer que toutes ces conique sont leurs axes parallèles; trouver la direction de ces axes.

Parmi ces coniques on considérera :

1° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction de l'axe des y sont conjuguées. Déterminer géométriquement son centre, et ses axes en grandeur et direction. Lieu du centre quand le point M parcourt la circonférence C.

2° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT et la direction de l'axe des x sont conjuguées. — Mêmes questions que pour la précédente : on exprimera en coordonnées polaires le lieu du centre.

(3 juin. — Géométrie et géométrie analytique : 3 h. 1/2.)

NOTA. — La question 96 sera traitée dans le numéro d'août.

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Mathématiques.

97. — On donne une quadrique Q et une sphère S de rayon nul ayant pour centre le point P; soit Σ une quelconque des quadriques passant par l'intersection de la quadrique Q et de la sphère S.

1° Démontrer que le cône ayant pour sommet le point P et pour base la section de la surface Σ par un plan touchant la quadrique Q en un point quelconque M a pour un de ses axes de symétrie la droite PM.

2° Trouver le nombre des quadriques Σ qui se réduisent à de véritables cônes et les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'un de ces cônes devienne un véritable cylindre ou un système de deux plans réels.

3° La quadrique Q et le point P étant donnés, examiner si la propriété énoncée au numéro premier peut subsister quand on remplace la sphère point S par une quadrique convenablement choisie.

(1er juin, de 10 h. à 1 h. 1/2.)

BOURSES DE LICENCE

Licence ès sciences mathématiques.

98. — 1° Représenter sur une même figure les trois courbes A, B, C, dont les équations en coordonnées rectangulaires sont

$$A : \quad y^2 + 3a^2x^2 - 3axy - a^3 = 0,$$
$$B : \quad y - x^3 = 0,$$
$$C : \quad y + x^3 - 3ax = 0.$$

2° Les points B, B', C, C' ou l'ellipse A rencontre les courbes B et C sont les sommets d'un parallélogramme. On demande les lieux décrits par les milieux des côtés de ce parallélogramme et par les sommets du parallélogramme formé par les tangentes à l'ellipse aux points B, B', C, C' quand le paramètre a varie.

3° Montrer qu'il existe une valeur de a et une seule telle que l'ellipse correspondante A soit réelle et passe par un point donné P du plan. On donnera l'expression explicite de la valeur de a au moyen des coordonnées du point P.

Déterminer les coefficients angulaires des axes de l'ellipse A, en distinguant les coefficients angulaires du petit axe et du grand axe.

(1er juillet, de 8 h. à midi.)

(1) Les autres sujets du concours sont insérés dans le numéro du 15 juin du *Journal de Mathématiques élémentaires.*

Licence ès sciences physiques.

I. — Mesure de l'altitude au moyen du baromètre. Établir la formule qui lie la variation de hauteur de la colonne de mercure à la variation d'altitude.

II. — Une lentille convergente L, de 1^{cm} de distance focale, donne une image réelle d'un objet sur un écran placé à 2^{m} de la lentille. On interpose entre cette lentille L et l'écran une lentille divergente L', de 2^{cm} de distance focale, placée à 1^{cm} de L. Comment et de combien faut-il faire varier la distance de l'objet à la lentille L pour que l'image réelle se forme de nouveau nette sur l'écran? — Quel est le rapport entre la grandeur de cette nouvelle image et celle de la première? — On considérera les lentilles comme infiniment minces.

III. — Préparation et propriétés chimiques du cyanogène.

IV. — $0^{gr},3213$ d'acide arsénieux en dissolution étendue sont transformés complètement en acide arsénique par un courant d'oxygène ozonisé. Quel est le poids d'ozone qui a effectué cette transformation? Si l'expérience est faite au sein d'un calorimètre, on observe un dégagement de chaleur de $0^{c},224$. Calculer la chaleur de formation de l'ozone sachant que l'acide arsénieux est transformé en acide arsénique avec un dégagement de chaleur de $39^{c},2$.

(1er juillet, de 8 h. à midi.)

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Physique et chimie.

I. — Lunette astronomique.

II. — Mesure de la tension de la vapeur d'eau aux températures élevées par la méthode de Regnault

III. —Action du chlore : sur l'ammoniaque, sur l'acide sulfureux, sur le bicarbure d'hydrogène.

(4 juin, de 7 h. à 10 h.)

Mathématiques.

99. — On donne une parabole P; on porte, à partir de chacun de ses points, et dans les deux sens, sur une parallèle à une direction fixe, Δ, des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole.

1° Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs : montrer qu'il se compose de deux paraboles P_1 et P_2, et donner la raison de ce dédoublement.

2° Démontrer que les axes des paraboles P_1 et P_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre, qu'ils pivotent autour d'un même point indépendant de la direction Δ, et que, quelle que soit cette direction, la somme des carrés des paramètres des deux paraboles est constante.

3° Trouver et construire le lieu décrit par les sommets des paraboles P_1 et P_2, lorsqu'on fait varier la direction Δ.

On prendra comme axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de la parabole donnée; on désignera par p son paramètre, et par θ l'angle de Δ avec l'axe des x.

(5 juin, de 7 h. à 11 h.)

Calcul trigonométrique.

On donne les trois côtés d'un triangle :

$$a = 12428^{m},76 \qquad b = 28394^{m},52, \qquad c = 34236^{m},84.$$

Calculer les trois angles et la surface.

Résultats :

$$A = 20^{\circ}\,45'\,51'',54, \qquad B = 52^{\circ}\,18'\,15'',07, \qquad C = 107^{\circ}\,25'\,53'',38, \qquad S = 168\,350\,800^{m^2}.$$

(5 juin, de 1 h. 1/2 à 6 h.)

Géométrie descriptive.

100. — D'un cylindre de révolution supposé plein, limité par deux plans de profil, on enlève la portion située à l'intérieur d'un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical. Représenter par ses projections le solide obtenu.

La distance entre les plans de profil est de 23^{cm}.

Le centre de l'hyperboloïde se projette horizontalement à 13^{cm} du plan de profil de droite, à 10^{cm} au-dessus du bord inférieur de la feuille, et à 21^{cm} au-dessous de sa projection verticale; les génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal; le rayon du cercle de gorge est de 3^{cm}.

Le cylindre a 6^{cm} de rayon; son axe est de front et sa pente est de 3 de base pour 1 de hauteur; on s'élève sur cet axe en allant de droite à gauche, et il rencontre l'axe de l'hyperboloïde à 1^{cm} au-dessous du plan du cercle de gorge.

On indiquera seulement les constructions nécessaires pour déterminer : 1° un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point ; 2° les points remarquables de l'intersection et les tangentes en ces points.

Les constructions, les tangentes et les parties enlevées seront en trait rouge continu; la représentation du solide sera seule en noir, trait plein pour les parties vues, points ronds pour les parties cachées.

(6 juin, de 7 h. à 11 h.)

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Mathématiques.

101. — Soit (E) une ellipse qui, rapportée à ses axes, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M du plan de cette ellipse; on considère le cercle (C) passant par le point M et les points de contact P, Q des tangentes à l'ellipse issues du point M.

1° Le cercle (C) rencontre l'ellipse en deux autres points P′, Q′; prouver que les tangentes à l'ellipse en ces deux points se coupent en un point M′ situé sur le cercle; montrer que par M, M′ et les deux foyers réels on peut faire passer un cercle; de même par M, M′ et les deux foyers imaginaires.

2° Soient I, I′, I″ les points où se coupent respectivement les droites PQ, P′Q′, les droites PQ′, P′Q, enfin les droites PP′, QQ′; on suppose que le point M reste fixe et que l'ellipse (E) se déforme en gardant les mêmes foyers : on demande les lieux décrits par les points I, I′, I″; on propose enfin de montrer que tout cercle passant par les points I′, I″ est orthogonal au cercle décrit sur MM′ comme diamètre.

(15 juin, de 8 h. à 2 h.)

Physique.

102. — Dans une boîte rectangulaire de 4 décimètres de longueur, une face est formée par une glace dépolie carrée de 1 décimètre de côté; au centre de la face opposée est percé un petit trou circulaire. On met, à égale distance du trou et de la glace, un dessin transparent dont l'ombre se forme sur la glace quand on expose le trou en face d'un mur blanc vivement éclairé.

On demande quels changements seront produits dans l'éclairement et dans les dimensions de l'ombre par l'introduction d'une lentille achromatique convergente sur l'axe de la boîte, dans l'une des positions suivantes :

1° Entre le dessin et le trou;

2° Entre le trou et le mur.

Le diamètre de la lentille est égal à un cinquième de décimètre, et sa distance focale à un décimètre.

103. — Une éprouvette cylindrique pleine d'eau peut tourner d'un mouvement uniforme autour de son axe de figure supposé vertical; une potence liée à l'éprouvette supporte sans frottement une poulie de dimensions négligeables, placée exactement sur l'axe de rotation. Un poids P (25 grammes) est attaché à un bout d'un fil non pesant qui passe sur la poulie et vient s'attacher par l'autre bout à un aréomètre dont la tige a une section d'un centimètre carré. Section droite de l'éprouvette : 10 centimètres carrés.

Au repos, lorsque l'équilibre est établi, la partie du fil comprise entre la poulie et le poids P a une longueur $l = 30$ centimètres.

Quel est le déplacement vertical de l'aréomètre quand tout l'appareil tourne avec une vitesse angulaire ω, ce qui projette le point P latéralement?

On admet que l'aréomètre reste exactement centré et que la surface libre de l'eau reste horizontale.

$g = 980$ (C. G. S.).

(16 juin, de 8 h. 1/4 à 2 h. 1/4.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS — IMP. CHAIX. — 14440-6-91.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ÉCOLE NAVALE (Concours de 1891).

Géométrie analytique.

96. — *Etant donné le cercle* $x^2 + (y - \gamma)^2 = R^2$, *rapporté à des axes rectangulaires* Oxy, *et qui coupe l'axe des* x *en deux points* A *et* A′, *on considère un point quelconque* M *de ce cercle, défini par l'angle* φ *que le rayon* CM *fait avec l'axe des* x. *Trouver l'équation générale des coniques passant par les points* A *et* A′ *et tangentes en* M *à la circonférence* C; *démontrer que toutes ces coniques ont leurs axes parallèles; trouver la direction de ces axes.*

Parmi ces coniques on considérera :

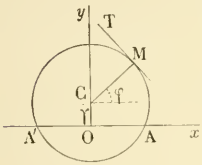
1° Celles pour lesquelles la direction de la tangente MT *et la direction de l'axe des* y *sont conjuguées. Déterminer géométriquement leurs centres et leurs axes, en grandeur et direction. Lieu du centre quand le point* M *parcourt la circonférence* C;

2° Celle pour laquelle la direction de la tangente MT *et la direction de l'axe des* x *sont conjuguées. — Mêmes questions que pour les précédentes; on exprimera en coordonnées polaires le lieu du centre.*

I. — Solution par le calcul.

Équation générale de toutes les coniques données.

Pour avoir l'équation de la tangente en M au cercle donné, imaginons que l'origine O des coordonnées soit transportée au centre C du cercle, les axes de coordonnées conservant leurs directions; dans cette hypothèse, l'équation de la tangente est



$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - R = 0.$$

Or, l'origine O a pour ordonnée $-\gamma$ relativement à ces nouveaux axes; l'équation cherchée est donc

$$x \cos \varphi + (y - \gamma) \sin \varphi - R = 0.$$

Toutes les coniques qui passent par les points d'intersection du cercle avec la conique particulière formée par l'axe des x et la tangente ont pour équation

$$x^2 + (y - \gamma)^2 - R^2 + 2\lambda y[x \cos \varphi + (y - \gamma) \sin \varphi - R] = 0. \qquad (1)$$

En l'ordonnant par rapport à x et y, on obtient

$$x^2 + 2\lambda \cos \varphi\, xy + (1 + 2\lambda \sin \varphi)y^2 - 2(\gamma + \lambda\gamma \sin \varphi + \lambda R)y + \gamma^2 - R^2 = 0. \qquad (1')$$

Directions des axes. — On sait que l'équation aux coefficients angulaires des axes d'une conique est

$$Bm^2 + (A - C)m - B = 0,$$

A, B, C ayant la signification habituelle. Cette équation est dans le cas actuel

$$\lambda \cos \varphi . m^2 - 2\lambda \sin \varphi . m - \lambda \cos \varphi = 0; \qquad (2)$$

λ n'est pas nul, sinon l'équation (1) représenterait le cercle donné; l'équation (2) peut donc s'écrire

$$\cos \varphi . m^2 - 2 \sin \varphi . m - \cos \varphi = 0.$$

On voit qu'elle ne dépend pas de λ, ce qui prouve que toutes les coniques représentées par l'équation (1) ont leurs axes parallèles.

Les racines de cette équation ont pour valeurs

$$\frac{\sin \varphi \pm 1}{\cos \varphi} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \pm 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}.$$

Considérons celle qu'on obtient en prenant + I ; la valeur de cette racine peut s'écrire

$$\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} \qquad \text{ou bien} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Mais le coefficient angulaire de la tangente donnée est

$$-\operatorname{cotg}\varphi \qquad \text{ou bien} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right).$$

On voit que *la direction de l'un des axes des coniques données est celle de la bissectrice de l'un des angles que fait la tangente donnée avec l'axe des* x. L'autre axe a évidemment pour direction l'autre bissectrice.

Coniques pour lesquelles MT et l'axe des y ont des directions conjuguées.

Cherchons celles des coniques données pour lesquelles la tangente MT a une direction conjuguée de l'axe des y. L'équation du diamètre conjugué des cordes parallèles à l'axe des y est $f'_y = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda\cos\varphi\, x + (1 + 2\lambda\sin\varphi)y - (\gamma + \lambda\gamma\sin\varphi + \lambda R) = 0. \tag{3}$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il ait même direction que la tangente représentée par

$$x\cos\varphi + (y-\gamma)\sin\varphi - R = 0$$

est évidemment

$$\lambda\cos\varphi\sin\varphi - \cos\varphi\,(1 + 2\lambda\sin\varphi) = 0.$$

Elle se décompose en

$$\cos\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda = -\frac{1}{\sin\varphi}.$$

Première solution. — Supposons d'abord que $\cos\varphi$ soit nul; cela signifie que le point M est placé sur l'axe des y et que la tangente donnée est parallèle à l'axe des x. Comme λ reste arbitraire, l'équation (1) ou (1') représente une infinité de coniques, et comme le terme en xy disparaît, les axes de toutes ces coniques ont mêmes directions que les axes de coordonnées.

La dérivée partielle par rapport à x du premier membre de l'équation (1) se réduit à $2x$. Donc *les centres de toutes ces coniques sont sur l'axe des* y. Réciproquement, tout point de cette droite est le centre de deux des coniques précédentes. Car si, après avoir fait $\cos\varphi = 0$ et $\sin\varphi = \pm 1$ dans l'équation (3), on donne à y une valeur particulière quelconque, cette équation, du premier degré en λ, donne pour cette arbitraire deux valeurs acceptables; l'une correspond à $\sin\varphi = +1$, c'est-à-dire au cas où le point de contact de la tangente est B; l'autre au cas où le point de contact est B'.

A toute valeur de λ répondent deux coniques dont on a les équations en attribuant dans l'équation (1) ou (1') à $\cos\varphi$ la valeur zéro et à $\sin\varphi$ soit la valeur 1 soit la valeur -1. L'équation (3) dans laquelle on fera les mêmes hypothèses fera connaître l'ordonnée du centre, et, par suite, l'équation de l'axe parallèle à Ox. Ayant les équations des axes, on en déduira sans difficulté leurs longueurs.

Seconde solution. — Supposons maintenant $\cos\varphi \neq 0$. On doit alors avoir $\lambda = -\frac{1}{\sin\varphi}$. Il n'y a donc qu'une seule conique pour laquelle l'axe des y et la tangente aient des directions conjuguées. Son équation est

$$x^2 - 2xy\operatorname{cotg}\varphi - y^2 + 2\frac{Ry}{\sin\varphi} + \gamma^2 - R^2 = 0$$

ou bien

$$x^2\sin\varphi - 2xy\cos\varphi - y^2\sin\varphi + 2Ry + (\gamma^2 - R^2)\sin\varphi = 0.$$

On voit que c'est une hyperbole équilatère. Cherchons son centre ; on a

$$\frac{1}{2}f'_x = x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_y = -x\cos\varphi - y\sin\varphi + R = 0.$$

Ces équations résolues par rapport à x et y donnent

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi. \end{cases} \tag{4}$$

Telles sont les coordonnées du centre.

Si l'on transporte l'origine en ce point en conservant aux axes leurs directions, le terme constant de la

nouvelle équation aura pour valeur la demi-dérivée par rapport à z dans laquelle x sera remplacé par $R\cos\varphi$ et y par $R\sin\varphi$; on aura ainsi

$$R^2\sin\varphi + (\gamma^2 - R^2)\sin\varphi \qquad \text{ou} \qquad \gamma^2\sin\varphi.$$

L'équation de l'hyperbole est alors

$$x^2\sin\varphi - 2xy\cos\varphi - y^2\sin\varphi + \gamma^2\sin\varphi = 0.$$

Axes. — On peut trouver la longueur commune de ses axes en faisant tourner les axes de coordonnées de manière à les appliquer sur les axes de la courbe. On sait que les relations entre les anciens coefficients et les nouveaux sont

$$A' + C' = A + C, \qquad A' - C' = \varepsilon\sqrt{4B^2 + (A - C)^2},$$

en désignant ± 1 par ε.

Nous aurons donc ici $\qquad A' + C' = 0, \qquad A' - C' = 2\varepsilon.$

L'équation de la courbe rapportée à ses axes est donc

$$x^2 - y^2 + \varepsilon\gamma^2\sin\varphi = 0.$$

Le choix du signe dépend, comme on sait, de celui des deux axes de la courbe qu'on a pris pour axe des x. Il faut prendre $+$ si la direction choisie est celle de la bissectrice de l'angle formé par MT et Ox qui rencontre le cercle donné.

La longueur commune des axes est, en supposant γ positif, $\gamma\sqrt{\sin\varphi}$ si $\sin\varphi$ est positif, $\gamma\sqrt{-\sin\varphi}$ si $\sin\varphi$ est négatif.

Lieu du centre. — Les équations (4) montrent que le centre est toujours sur le cercle représenté par l'équation

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Il est égal au cercle donné, mais son centre est l'origine des coordonnées. Réciproquement, tout point de ce cercle est centre d'une certaine hyperbole remplissant les conditions de l'énoncé : car à tout point de ce cercle correspond une valeur de $\cos\varphi$ et une de $\sin\varphi$, et, par suite, une des hyperboles considérées.

Coniques pour lesquelles MT et l'axe des x ont des directions conjuguées.

Le diamètre conjugué des cordes parallèles à Ox est représenté par l'équation

$$x + \lambda y\cos\varphi = 0;$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'il ait même direction que la tangente

$$x\cos\varphi + (y - \gamma)\sin\varphi - R = 0$$

est

$$\sin\varphi - \lambda\cos^2\varphi = 0.$$

L'élimination de λ entre cette équation et l'équation (1) conduit à l'équation

$$[x^2 + (y - \gamma)^2 - R^2]\cos^2\varphi + 2y\sin\varphi[x\cos\varphi + (y - \gamma)\sin\varphi - R] = 0,$$

qui, ordonnée, s'écrit

$$x^2\cos^2\varphi + 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2(1 + \sin^2\varphi) - 2(\gamma + R\sin\varphi)y + (\gamma^2 - R^2)\cos^2\varphi = 0. \qquad (5)$$

Le genre de cette conique dépend du signe de δ; or on a

$$\delta = (1 + \sin^2\varphi)\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi \equiv \cos^2\varphi.$$

Si $\cos\varphi = 0$, la conique est du genre parabole; elle se compose, en effet, de l'axe des x et de la tangente au cercle soit en B soit en B'; chacune de ces droites est un diamètre singulier parallèle aux cordes correspondantes. Écartons ce cas; $\cos^2\varphi$ est alors positif et l'équation (5) représente une ellipse quelle que soit la position du point M.

Le centre est le point d'intersection des droites

$$\frac{1}{2}f'_x = x\cos\varphi + y\sin\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'_y = x\sin\varphi\cos\varphi + y(1 + \sin^2\varphi) - (\gamma + R\sin\varphi) = 0.$$

La valeur de y tirée de ces équations est

$$y = \gamma + R \sin \varphi.$$

L'ordonnée du centre est donc égale à celle du point M où la tangente touche le cercle. L'abscisse a pour valeur

$$x = -y \operatorname{tg} \varphi = -(\gamma + R \sin \varphi) \operatorname{tg} \varphi.$$

Axes. — Rapportons la courbe à son centre et à ses axes en suivant la méthode exposée plus haut. Le terme constant est

$$-(\gamma + R \sin \varphi)^2 + (\gamma^2 - R^2) \cos^2 \varphi \quad \text{ou bien} \quad -(\gamma \sin \varphi + R)^2.$$

A′ et C′ étant les nouveaux coefficients de x^2 et y^2, on trouve

$$A' + C' = 2,$$

$$A' - C' = \pm 2 \sin \varphi,$$

d'où

$$A' = 1 \pm \sin \varphi, \qquad C' = 1 \mp \sin \varphi.$$

L'équation de la courbe est donc, en désignant ± 1 par ε,

$$(1 + \varepsilon \sin \varphi)x^2 + (1 - \varepsilon \sin \varphi)y^2 - (\gamma \sin \varphi + R)^2 = 0.$$

Le choix du signe dépend de celui des axes de la courbe qu'on a pris pour axe nouveau des abscisses.

On voit que pour toutes les valeurs de φ ces ellipses sont réelles; les longueurs de leurs axes sont

$$\frac{\gamma \sin \varphi + R}{\sqrt{1 + \sin \varphi}} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma \sin \varphi + R}{\sqrt{1 - \sin \varphi}}$$

ou bien

$$\frac{\gamma \sin \varphi + R}{\varepsilon \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma \sin \varphi + R}{\varepsilon' \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

les signes étant choisis de manière que les dénominateurs soient positifs.

Lieu du centre. — Eliminons φ entre les deux équations qui déterminent le centre; on peut les écrire

$$\sin \varphi = \frac{y - \gamma}{R}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{x}{y}. \tag{6}$$

De la seconde on déduit

$$\sin \varphi = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Les centres de toutes ces ellipses quand le point M parcourt le cercle sont donc sur la courbe représentée par l'équation

$$\frac{(y - \gamma)^2}{R^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \tag{7}$$

Réciproquement, tout point de cette courbe est le centre d'une des ellipses considérées. En effet, si l'on prend arbitrairement un point x_1, y_1 sur cette ligne, les équations (6) dans lesquelles on remplacera x et y par x_1 et y_1 donneront pour l'angle φ une valeur et une seule : car la valeur absolue de $\frac{y_1 - \gamma}{R}$ étant égale à celle de $\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ est certainement inférieure ou égale à 1; il existe donc entre zéro et 2π deux angles ayant pour sinus $\frac{y_1 - \gamma}{R}$; l'un de ces angles a pour tangente $-\frac{x_1}{y_1}$; c'est la valeur de φ qui correspond au point choisi.

Construction de la courbe. — On pourrait construire la courbe représentée par l'équation (7) en résolvant cette équation par rapport à x; on aurait alors à étudier les variations d'une fonction explicite de y. La discussion serait simplifiée si, au préalable, on transportait l'origine au centre du cercle donné. Nous nous contenterons, suivant l'énoncé du problème, de traduire cette équation en coordonnées polaires, puis d'étudier la variation du rayon vecteur ρ.

Prenons l'axe des x pour axe polaire et l'origine pour pôle.

Nous devons alors remplacer dans l'équation (7) x par $\rho \cos \omega$ et y par $\rho \sin \omega$; elle devient

$$(\rho \sin \omega - \gamma)^2 = R^2 \cos^2 \omega,$$

équation qui se décompose en
$$\rho = \frac{\gamma + R \cos \omega}{\sin \omega}, \tag{8}$$

et
$$\rho = \frac{\gamma - R \cos \omega}{\sin \omega}. \tag{9}$$

Si nous donnons à ω la valeur ω_1 dans l'une de ces équations et la valeur $\pi - \omega_1$ dans l'autre, le rayon vecteur ρ reprend la même valeur, de sorte que les courbes représentées par ces équations sont symétriques par rapport à la perpendiculaire à l'axe polaire menée par le pôle. Nous pouvons donc étudier seulement l'équation (8).

Si nous donnons à ω la valeur $\pi + \omega_1$ dans (8) et la valeur ω_1 dans (9), les deux valeurs de ρ ont une somme nulle; il en résulte qu'à ces valeurs de ω correspond un seul point du plan. Nous pourrons donc faire varier ω seulement de zéro à π dans (8): car en le faisant varier de π à 2π, on aurait la courbe représentée par l'équation (9).

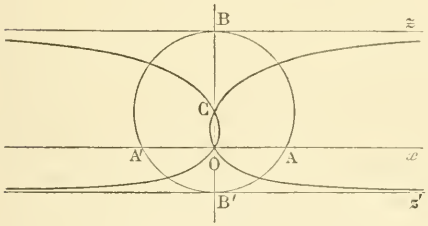
La dérivée ρ' de ρ a pour valeur
$$\rho' = \frac{-(\gamma \cos \omega + R)}{\sin^2 \omega}.$$

Il en résulte
$$\frac{\rho^2}{\rho'} = -\frac{(\gamma + R \cos \omega)^2}{\gamma \cos \omega + R}.$$

L'ordonnée γ du centre du cercle donné est plus petite que R; c'est là une conséquence immédiate de l'énoncé. Il en résulte que ρ' et $\frac{\rho^2}{\rho'}$ sont des fonctions constamment négatives. Le rayon vecteur ρ est donc constamment décroissant. Il est infini et positif pour $\omega = 0$; il vaut γ pour $\omega = \frac{\pi}{2}$; il s'annule pour $\cos \omega = -\frac{\gamma}{R}$, devient négatif, et décroît jusqu'à $-\infty$ quand ω croît jusqu'à π.

Pour avoir l'asymptote qui correspond à $\omega = 0$, calculons ce que devient $\frac{\rho^2}{\rho'}$ pour cette valeur de ω; nous trouvons

$$-\frac{(\gamma + R)^2}{\gamma + R} \quad \text{ou} \quad -(\gamma + R).$$



Cette valeur négative doit être portée du côté des ω croissants, sur la perpendiculaire à l'axe polaire; on a ainsi le point B. L'asymptote est Bz.

Donnons à ω la valeur π; $\frac{\rho^2}{\rho'}$ devient

$$-\frac{(\gamma - R)^2}{R - \gamma} \quad \text{ou} \quad -(R - \gamma).$$

Cette valeur doit être portée sur la perpendiculaire à la direction $\omega = \pi$, et dans le sens des ω croissants puisqu'elle est négative. On a ainsi le point B' et l'asymptote B'z'.

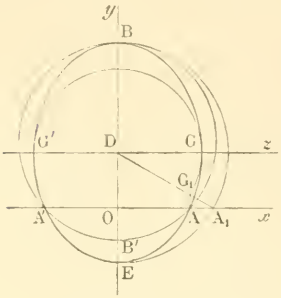
La figure ci-dessus représente la courbe complète.

II. — Solution géométrique.

Toutes les coniques données peuvent être regardées comme rencontrant le cercle donné en quatre points qui sont A, A' et deux points confondus en M. Nous pouvons donc affirmer, d'après une propriété connue, que les axes de toutes ces coniques sont parallèles aux bissectrices des angles formés par la droite AA' et la tangente MT.

Cherchons parmi ces coniques celles pour lesquelles la tangente et l'axe des y ont des directions conjuguées. Supposons que le point de contact soit en B; la tangente est alors parallèle à la corde AA', et l'axe des y joignant

le point de contact d'une tangente au milieu de cette corde est le diamètre des cordes parallèles à la tangente; ce diamètre étant perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales est un axe de la conique. Le point B est un sommet.

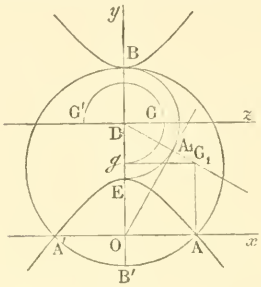


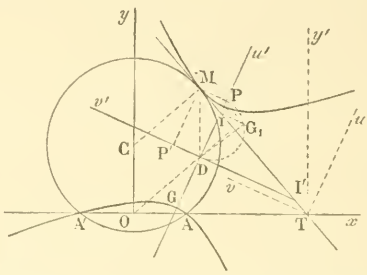
On peut prendre arbitrairement sur Oy un point D et le regarder comme centre d'une conique passant en A et A' et ayant un sommet en B. Cette conique est alors bien déterminée; on aura la longueur de l'axe dirigé suivant Oy en doublant BD, ce qui donnera BE; l'autre axe est dirigé suivant la perpendiculaire Dz menée par D à Oy. On aura sa longueur en faisant une construction inverse de celle qui donne un point d'une ellipse ou d'une hyperbole dont on connaît les axes.

Supposons, par exemple, que le point O soit situé entre les sommets B et E; la courbe est alors une ellipse; pour trouver l'axe dirigé suivant Dz décrivons un demi-cercle sur BE comme diamètre. Il rencontrera A'A en A_1; traçons DA_1 puis la parallèle AG_1 à l'axe BE jusqu'à sa rencontre en G_1 avec DA_1; la longueur demandée est DG_1; il suffit de la rabattre en DG ou DG'.

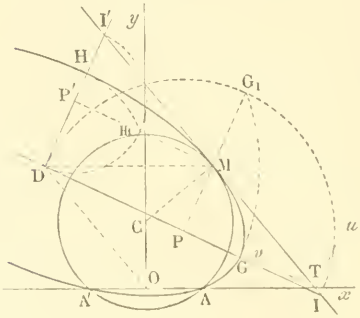
S'il s'agit d'une hyperbole, ce qui arrive quand le point O ne tombe pas entre B et E, menons de O la tangente OA_1 au demi-cercle décrit sur BE comme diamètre; le rayon de contact DA_1 est rencontré en G_1 par la parallèle à l'axe BE menée par A; projetons G_1 en g sur cet axe. La longueur cherchée est Dg. il suffit de la rabattre sur Dz en G et G'.

On ferait des constructions analogues si le point de contact de la tangente donnée était B'.





Supposons maintenant que le point M où la tangente donnée touche le cercle soit quelconque; par le point T où cette tangente coupe l'axe des x, menons la parallèle Ty' à l'axe des y, traçons les bissectrices Tu, Tv des angles formés par MT et Ox. Ce sont les directions des axes; or l'angle vTu contient l'angle MTy' formé par deux directions conjuguées; la conique est donc une hyperbole : car c'est seulement dans l'hyperbole que les couples de directions conjuguées *s'emboîtent* l'un dans l'autre. Cette hyperbole est équilatère parce que l'angle uTy' vaut vTO puisque ces angles ont le même complément vTy'; de plus vTO = vTM par construction; il en résulte vTM = uTy' c'est-à-dire que les directions conjuguées TM et Ty' sont également inclinées sur les axes : cela ne peut avoir lieu dans une hyperbole qui ne serait pas équilatère.



Pour avoir son centre nous remarquerons que la parallèle MD à l'axe des y est le diamètre des cordes parallèles à MT. Nous aurons un second diamètre en abaissant de O milieu de la corde A'A une perpendiculaire à MT : car une propriété connue de l'hyperbole équilatère est que si deux directions de cordes sont rectangulaires, il en est de même des directions conjuguées. Nous avons donc deux diamètres dont le point de rencontre D est le centre de la courbe.

Lieu des centres. — La figure OCMD est évidemment un

parallélogramme, de sorte que OD = CM. Si donc le point M parcourt le cercle donné, D décrit un cercle égal ayant O pour centre.

Construction des axes. — Les axes sont dirigés suivant les parallèles menées par D aux droites Tu et Tv. Cherchons leurs longueurs. Nous connaissons un point M de l'hyperbole et la tangente en ce point; soient I et I′ les points où elle coupe les axes. L'un de ces points I est, par rapport au centre D, du même côté que le pied P de la perpendiculaire abaissée de M sur l'axe, tandis que l'autre I′ et la projection P′ de M sur l'autre axe sont de part et d'autre de D. Le premier axe est l'axe transverse et, d'après une propriété connue de la tangente, on aura sa longueur en construisant une moyenne proportionnelle entre DI et DP; elle est construite en DG_1; il ne reste plus qu'à la rabattre sur chaque axe de part et d'autre du centre D.

Il nous reste à étudier celles des coniques données pour lesquelles la tangente MT et l'axe des x ont des directions conjuguées. Les directions des axes de la courbe étant toujours les bissectrices Tu et Tv des angles T, il est évident que les directions conjuguées TM et TO *chevauchent* sur les directions des axes. Les coniques que nous avons à étudier sont donc des ellipses. Et comme les directions TM et TO sont également inclinées sur les axes, on voit que ce sont les directions des diamètres conjugués égaux.

Construction des axes. — La parallèle menée par M à l'axe des x est un diamètre; la parallèle menée par O, milieu de AA′, à la tangente MT en est un second; ces deux diamètres se coupent au centre D de l'ellipse qui correspond au point M.

Pour construire les longueurs des axes, nous utiliserons la propriété de la tangente à l'ellipse analogue à celle qui nous a déjà servi pour l'hyperbole. Nous projetons M en P et P′ sur les axes, et si nous appelons I et I′ les points où ces droites sont rencontrées par la tangente MT, nous construisons les moyennes proportionnelles entre DP et DI d'une part, DP′ et DI′ d'autre part. Nous avons ainsi les sommets G et H.

Le lieu des centres D peut être construit par points à l'aide du parallélogramme OTMD. Les points remarquables correspondent aux cas où le point M est situé sur le diamètre du cercle donné parallèle à Ox, ou sur Oy, ou enfin en l'un des points A et A′.

E. Dessenon.

MM. A. Audouin (lycée de Cherbourg) et A. Dumas (lycée de Lyon) ont résolu cette question.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

56. — *Lieu des pieds des normales issues de l'origine à une parabole de grandeur constante qui se déplace en restant tangente aux axes de coordonnées supposés rectangulaires.*

Une parabole tangente aux deux axes de coordonnées a une équation qui peut s'écrire

$$(bx + ay - ab)^2 - 4abxy = 0, \tag{1}$$

la corde de contact ayant pour équation $bx + ay - ab = 0$.

Écrivons que le paramètre est constant; on obtient

$$p^2 = \frac{4a^4b^4}{(a^2 + b^2)^3}. \tag{2}$$

Les points dont on cherche le lieu sont à l'intersection de la parabole et de l'hyperbole d'Apollonius relative à l'origine, dont l'équation est

$$(bx + ay - ab)(ax - by) - 2ab(x^2 - y^2) = 0. \tag{3}$$

On aura l'équation du lieu en éliminant a et b entre les équations (1), (2) et (3).

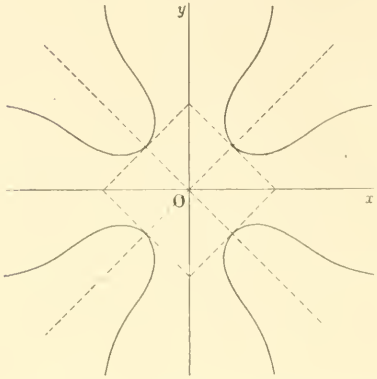
Éliminons $bx + ay - ab$ entre (1) et (3); on obtient

$$(ax - by)^2xy - ab(x^2 - y^2)^2 = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(bx - ay)(ax^3 - by^3) = 0.$$

Or le facteur $bx - ay$ correspond à la normale dont le point de contact est rejeté à l'infini dans la direction de l'axe; il reste alors



$$ax^3 - by^3 = 0,$$

équation qui, jointe à l'équation (3), permet de calculer a et b. On trouve ainsi

$$a = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^3}, \qquad b = \frac{(x^2 + y^2)^2}{y^3};$$

et en remplaçant a et b par ces valeurs dans l'équation (2), on a l'équation du lieu, à savoir

$$p^2 = \frac{4x^6y^6(x^2 + y^2)^4}{(x^6 + y^6)^3},$$

qu'on peut écrire, en remarquant que $x^6 + y^6$ est divisible par $x^2 + y^2$ et que le quotient est $x^4 - x^2y^2 + y^4$,

$$4x^6y^6(x^2 + y^2) - p^2(x^4 - x^2y^2 + y^4)^3 = 0.$$

Ce lieu est une courbe du quatorzième degré, ayant un point isolé à l'origine du douzième ordre. Elle est symétrique par rapport aux deux axes et aux bissectrices de ces axes. On la construit aisément en posant $y = tx$; elle admet des branches paraboliques parallèles à Ox et à Oy.

J. Vigneaux, lycée de Toulouse.

(Solutions semblables par MM. Auzeram (lycée de Toulouse); Louis Gambey (Louis-le-Grand); C. H; A. Lecoquierre (lycée de Rouen); Perrée (Condorcet).)

Autre solution. — Considérons une parabole tangente à l'axe Ox en A et à Oy en B. Soient $OA = a$, $OB = b$, et supposons a et b positifs. L'arc AB de la parabole a pour équation

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1.$$

On voit aisément que le pied de la normale réelle issue de O est sur cet arc. Si α et β sont les coordonnées du pied de cette normale, la tangente en ce point ayant pour équation

$$\frac{x - \alpha}{\sqrt{a\alpha}} + \frac{y - \beta}{\sqrt{b\beta}} = 0,$$

on a, en écrivant que la droite représentée par l'équation $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$ est perpendiculaire à la tangente :

$$a\alpha^3 = b\beta^3. \tag{1}$$

On a ensuite

$$\sqrt{\frac{\alpha}{a}} + \sqrt{\frac{\beta}{b}} = 1 \tag{2}$$

et

$$p^2(a^2 + b^2)^3 = 4a^4b^4. \tag{3}$$

Il s'agit d'éliminer a et b entre ces trois équations. Or l'équation (1) se met aisément sous la forme

$$\alpha^2\sqrt{\frac{\beta}{b}} - \beta^2\sqrt{\frac{\alpha}{a}} = 0. \tag{4}$$

Des équations (2) et (4), on tire $\sqrt{\frac{\alpha}{a}} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$, $\sqrt{\frac{\beta}{b}} = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$,

d'où $$a = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\alpha^3}, \qquad b = \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\beta^3};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (3), on obtient l'équation du lieu.

En coordonnées polaires, cette équation est

$$\rho^2 = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{(4 - 3\sin^2 2\omega)^3}{\sin^6 2\omega}.$$

PLOIX, lycée Louis-le-Grand.

---

63. — *En désignant par* m *un nombre entier positif, on considère deux polynomes* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *entiers en* x, *de degré inférieur à* m, *et tels que l'on ait identiquement*

$$(1 - x)^m\varphi(x) + x^m\psi(x) = 1.$$

1° Démontrer que l'on a identiquement

$$\psi(x) = \varphi(1 - x), \qquad \varphi(x) = \psi(1 - x), \qquad (1 - x)\varphi'(x) - m\varphi(x) = \alpha x^{m-1};$$

dans cette dernière égalité, α *désigne une constante et* $\varphi'(x)$ *la dérivée de* $\varphi(x)$: *en déduire, à l'aide du théorème de Rolle, que le polynome* $\varphi(x)$ *ne peut pas avoir deux racines négatives.*

2° Déterminer en fonction de m *la constante* α *et les coefficients du polynome* $\varphi(x)$; *démontrer que ce polynome a au plus une racine réelle.*

(Bourses de licence, 1890.)

1° On sait qu'il existe toujours deux polynomes entiers $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de degrés moindres que m et vérifiant l'identité

$$(1 - x)^m\varphi(x) + x^m\psi(x) \equiv 1, \tag{1}$$

puisque x^m et $(1 - x)^m$ sont premiers entre eux.

En changeant x en $1 - x$, l'identité précédente devient

$$x^m\varphi(1 - x) + (1 - x)^m\psi(1 - x) \equiv 1,$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(1 - x)^m[\varphi(x) - \psi(1 - x)] \equiv x^m[\varphi(1 - x) - \psi(x)].$$

Cette identité montre que x^m, étant premier avec $(1-x)^m$, divise $\varphi(x) - \psi(1 - x)$, ce qui est impossible, attendu que le degré de $\varphi(x) - \psi(1 - x)$ est inférieur à m. La dernière identité est donc impossible à moins que l'on ne suppose

$$\varphi(x) \equiv \psi(1 - x), \qquad \text{et par suite} \qquad \varphi(1 - x) \equiv \psi(x).$$

2° On déduit de (1), en prenant la dérivée par rapport à x,

$$(1 - x)^m\varphi'(x) - m(1 - x)^{m-1}\varphi(x) + x^m\psi'(x) + mx^{m-1}\psi(x) = 0$$

ou $$(1 - x)^{m-1}[(1 - x)\varphi'(x) - m\varphi(x)] \equiv -x^{m-1}[x\psi'(x) + m\psi(x)],$$

d'où résulte que x^{m-1}, premier avec $(1 - x)^{m-1}$, divise le polynome $(1 - x)\varphi'(x) - m\varphi(x)$, et comme ce dernier est au plus de degré $m - 1$, le quotient est une constante α, de sorte que l'on a

$$(1 - x)\varphi'(x) - m\varphi(x) \equiv \alpha x^{m-1}. \tag{2}$$

D'ailleurs, si l'on désigne par μ le degré de $\varphi(x)$ et par A le coefficient de x^μ, le terme du plus haut degré du premier membre est égal à $-A(\mu + m)$; on ne peut supposer $\alpha = 0$, car on en déduirait $A = 0$, ce qui est absurde. Donc on a $\mu = m - 1$ et $\alpha = -A(2m - 1)$.

3° Remarquons d'abord que l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a pas de racines multiples, car si a était une racine multiple, l'identité (2) montre que a serait nulle, or on déduit de (1) que $\varphi(0) = 1$.

Si l'équation $\varphi(x) = 0$ avait plus d'une racine négative, en appelant a et b deux racines négatives consécutives, on aurait en vertu de l'identité (2) :

$$(1 - a)\varphi'(a) = \alpha a^{m-1},$$
$$(1 - b)\varphi'(b) = \alpha b^{m-1},$$

d'où l'on déduirait $\varphi'(a)\varphi'(b) > 0$, ce qui est en contradiction avec le théorème de Rolle.

4° Pour déterminer les coefficients de $\varphi(x)$, rappelons d'abord que, en vertu de l'identité (1), on a $\varphi(0) = 1$; nous poserons donc

$$\varphi(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{p-1}x^{p-1} + A_p x^p + \ldots + A_{m-1}x^{m-1};$$

en substituant dans (2) et identifiant les deux membres on obtient

$$A_1 - m = 0,$$
$$2A_2 - (m + 1)A_1 = 0,$$
$$pA_p - (m + p - 1)A_{p-1} = 0,$$

d'où
$$A_p = \frac{m(m + 1) \ldots (m + p - 1)}{1.2 \ldots p} = K_m^p,$$

K_m^p désignant le nombre de combinaisons complètes de m lettres p à p.

On aura ainsi $A_{m-1} = K_m^{m-1}$ et par suite

$$\alpha = -(2m - 1)K_m^{m-1}.$$

On a donc

$$\varphi(x) = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m + 1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m + 1) \ldots (2m - 2)}{1.2 \ldots (m - 1)}x^{m-1},$$

et par suite

$$\psi(x) = 1 + \frac{m}{1}(1 - x) + \frac{m(m + 1)}{1.2}(1 - x)^2 + \ldots + \frac{m(m + 1) \ldots (2m - 2)}{1.2 \ldots (m - 1)}(1 - x)^{m-1}.$$

On pouvait aussi déterminer les coefficients de $\varphi(x)$ en remarquant que l'identité (2) donne, en supposant $p < m - 1$,

$$(1 - x)\varphi^{(p+1)}(x) - (m + p)\varphi^{(p)}(x) \equiv (m - 1)(m - 2) \ldots (m - p)\alpha x^{m-p-1}$$

et, pour $p = m - 1$,

$$-(2m - 1)\varphi^{(m-1)}(x) = (m - 1)!\,\alpha,$$

d'où l'on tire
$$\varphi^{(p+1)}(0) = (m + p)\varphi^{(p)}(0)$$

et
$$\alpha = -(2m - 1)A_{m-1} \quad \text{etc.}$$

5° Les coefficients de $\varphi(x)$ étant tous positifs, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a aucune racine positive; il résulte de ce qui précède (3°), que cette équation a une racine négative simple si m est pair, et n'a aucune racine réelle si m est impair.

Ont résolu la question : MM. J. Dupuy (Bordeaux), A. Lecoquierre (Rouen), J. Vigneaux (Toulouse), Auzeram (Toulouse), Tapi (Pau), E. Jossinet (Troyes).

Un abonné (M. J.) nous a envoyé une solution différente, au moins pour la première partie. M. J. détermine tout d'abord un polynome entier $\varphi(x)$, de degré $m - 1$, vérifiant l'identité

$$(1 - x)\varphi'(x) - m\varphi(x) = \alpha x^{m-1},$$

α désignant une constante. En multipliant les deux membres par $(1 - x)^{m-1}$, cette identité devient

$$D_x[(1 - x)^m\varphi(x)] \equiv \alpha x^{m-1}(1 - x)^{m-1}.$$

Il suffit de poser $$(1-x)^m\varphi(x) = \alpha\int_1^x x^{m-1}(1-x)^{m-1}dx,$$

et l'existence du polynome $\varphi(x)$ sera prouvée, si l'on fait voir que l'intégrale précédente est un polynome entier divisible par $(1-x)^m$.

Or, en posant $x = 1 - x'$, on a

$$\int_1^x x^{m-1}(1-x)^{m-1}dx = -\int_0^{x'}(1-x')^{m-1}x'^{\,m-1}dx'$$

$$= -\int_0^{x'}\left[x'^{\,m-1} - \frac{m-1}{1}\,x'^{\,m} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\,x'^{\,m+1} + \ldots + (-1)^{m-1}.\,x'^{\,2m-2}\right]dx'.$$

$$= -\frac{x'^{\,m}}{m} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{x'^{\,m+1}}{m+1} - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\cdot\frac{x'^{\,m+2}}{m+2} + \ldots + (-1)^m\cdot\frac{x'^{\,2m-1}}{2m-1}.$$

Donc

$$\varphi(x) = \alpha\left[-\frac{1}{m} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{1-x}{m+1} - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\cdot\frac{(1-x)^2}{m+2} + \ldots + (-1)^m\cdot\frac{(1-x)^{m-1}}{2m-1}\right].$$

D'ailleurs on a

$$(1-x)^m\varphi(x) = \alpha\int_1^x x^{m-1}(1-x)^{m-1}dx$$

$$= \alpha\left[\frac{x^m}{m} - \frac{m-1}{1}\cdot\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\cdot\frac{x^{m+2}}{m+2} - \ldots + (-1)^{m-1}\cdot\frac{x^{2m-1}}{2m-1}\right]$$

$$- \alpha\left[\frac{1}{m} - \frac{m-1}{1}\cdot\frac{1}{m+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{m+2} + \ldots + (-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{2m-1}\right].$$

En posant

$$\psi(x) = \alpha\left[-\frac{1}{m} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{x}{m+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{m+2} + \ldots + (-1)^m\cdot\frac{x^{m-1}}{2m-1}\right]$$

et $$1 = -\alpha\left[\frac{1}{m} - \frac{m-1}{1}\cdot\frac{1}{m+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{m+2} - \ldots - (-1)^m\cdot\frac{1}{2m-1}\right].$$

Les polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ vérifieront l'identité (1). De plus, les expressions trouvées pour ces polynomes montrent immédiatement que $\varphi(x) \equiv \psi(1-x)$ et $\varphi(1-x) \equiv \psi(x)$.

Remarque. — En comparant les deux déterminations de α, on a l'identité

$$1 = (2m-1)K_m^{m-1}\left[\frac{1}{m} - \frac{m-1}{1}\cdot\frac{1}{m+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{m+2} - \ldots - (-1)^m\cdot\frac{1}{2m-1}\right].$$

---

64. — *Étant donnés deux axes rectangulaires* Ox, Oy, *on considère un losange* PQP'Q' *ayant les deux sommets* P, P' *sur l'axe des* x *et les deux sommets* Q, Q' *sur l'axe des* y. *On supposera* OP = p, OQ = q.

1° Par un point M, *de coordonnées* x, y, *passent deux coniques inscrites dans le losange; former l'équation du second degré en* m, *qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes en* M *à ces deux coniques.*

2° Trouver le lieu des points M *où se coupent sous un angle donné deux coniques inscrites dans le losange.*

3° Déduire de l'équation aux coefficients angulaires que ce dernier lieu doit se composer d'hyperboles.

(Bourses de licence, 1890.)

1° — Les coniques inscrites dans un losange ont pour axes les deux diagonales; l'équation générale des coniques considérées sera donc de la forme

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} - 1 = 0; \tag{1}$$

et il suffira d'écrire que ces coniques sont tangentes à l'un des côtés du losange, PQ par exemple, qui a pour équation

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0.$$

On obtient la condition

$$\frac{\lambda}{p^2} + \frac{\mu}{q^2} - 1 = 0. \tag{2}$$

Considérons dans l'équation (1) x et y comme les coordonnées d'un point M; les équations (1) et (2), la première, du deuxième degré en λ et μ, la seconde, du prémier degré, déterminent deux systèmes de valeurs pour λ et μ. Il existe donc deux coniques passant par le point M.

Désignons par m le coefficient angulaire de la tangente en M à l'une de ces coniques, on aura

$$m = -\frac{\mu x}{\lambda y}. \tag{3}$$

Éliminons μ et λ entre (1), (2) et (3); nous aurons l'équation en m, qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes en M aux deux coniques.

On tire aisément μ et λ de (2) et (3); on obtient

$$\lambda = \frac{p^2q^2x}{q^2x - p^2my}, \qquad \mu = \frac{-mp^2q^2x}{q^2x - p^2my};$$

et transportant dans (1), on a l'équation cherchée,

$$m^2p^2xy - m[q^2x^2 + p^2y^2 - p^2q^2] + q^2xy = 0. \tag{4}$$

2° — Soient m_1 et m_2 les racines de cette équation; on aura

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2},$$

en désignant par α l'angle des deux tangentes.

On peut écrire cette équation

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}{(1 + m_1m_2)^2}. \tag{5}$$

Or, de l'équation (4) on tire, en posant $E = q^2x^2 + p^2y^2 - p^2q^2$,

$$m_1 + m_2 = \frac{E}{p^2xy}, \qquad m_1m_2 = \frac{q^2}{p^2}. \tag{6}$$

Remplaçant dans (5), on obtient

$$E^2 - x^2y^2[\operatorname{tg}^2 \alpha(p^2 + q^2)^2 + 4p^2q^2] = 0,$$

qu'on peut écrire

$$E \pm xy\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha(p^2 + q^2)^2 + 4p^2q^2} = 0.$$

On voit ainsi que le lieu se compose de deux coniques ayant leurs centres à l'origine; on vérifie aisément que ce sont des hyperboles.

3° — Dans l'équation (4) regardons m comme une constante; l'équation représente alors le lieu des points M par lesquels la tangente à l'une des coniques passant par M et inscrites au losange donné, a une direction donnée. On voit que si la constante m est réelle, ce lieu est une hyperbole, pourvu que l'on suppose $p^2m^2 - q^2 \neq 0$.

Cela posé, la relation $m_1 m_2 = \frac{q_2}{p^2}$ montre que si l'on pose $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \operatorname{tg} \alpha$, $m_1 - m_2$ sera une constante comme $m_1 m_2$; par suite m_1 et m_2 seront des constantes: d'ailleurs changer $\operatorname{tg} \alpha$ en $-\operatorname{tg} \alpha$ revient à permuter m_1 et m_2; on doit donc trouver pour lieu les deux hyperboles définies par l'équation (4) dans laquelle on remplace m successivement par m_1 et par m_2. Si $\operatorname{tg} \alpha = 0$, le lieu se réduit aux quatre côtés du losange, ce qui était évident *a priori*.

On peut remarquer que toute relation symétrique donnée entre m_1 et m_2 conduira nécessairement à un certain nombre d'équations de la forme $E = kxy$, k étant une constante.

AUDIBERT (Marseille).

[Ont résolu la même question : MM. J. DOPUY (Bordeaux); JOSSINET (Troyes); TAPI (Pau); P.-F. TEILRET (Saint-Étienne).]

---

65. — *Trouver l'aire contenue dans la portion fermée de la courbe* $x^4 + y^4 - a^2xy = 0$ *qui se trouve dans l'angle des coordonnées positives.*

En passant en coordonnées polaires, les axes étant supposés rectangulaires, l'équation de la courbe s'écrit

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 \sin \omega \cos \omega}{\cos^4 \omega + \sin^4 \omega}.$$

Quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, la valeur positive de ρ reste continue, part de zéro pour revenir à zéro; l'aire de la boucle ainsi formée est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\omega \quad \text{ou} \quad \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \omega \cos \omega \, d\omega}{\cos^4 \omega + \sin^4 \omega}.$$

L'intégrale indéfinie peut s'écrire

$$\int \frac{\operatorname{tg} \omega \, d.\operatorname{tg} \omega}{1 + \operatorname{tg}^4 \omega} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg}^2 \omega).$$

Intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\frac{\pi}{4}$. L'aire cherchée est donc $\frac{\pi a^2}{8}$.

Joseph CLUZET, collège Stanislas.

[Solutions analogues par MM. : A. ALAYRAC (Saint-Louis); AUDIBERT, à Marseille; capitaine E. N. BARISIEN; GAMBET (Louis-le-Grand); Th. GOT, à Montpellier; GOELLE, à Paris; E. JACQUEST (lycée de Dijon); Ch. du MONT (Sainte-Barbe); L. PERRÉE (Condorcet).]

PHYSIQUE

79. — RECTIFICATION.

Deux cas sont à distinguer :

1° L'eau du récipient est en partie à l'état liquide, en partie à l'état gazeux. C'est le cas traité par M. Lafolie.

2° L'eau est totalement vaporisée. Dans ce cas, en employant les mêmes notations que M. Lafolie, la quantité de chaleur rayonnée au temps x est d'une part

$$Ktdx$$

et d'autre part elle résulte d'un abaissement de température dt subi par le vase et la vapeur. On a donc

$$Ktdx = -(C + M\gamma)dt,$$

d'où l'on tire

$$-\frac{dt}{dx} = \frac{Kt}{C + M\gamma}. \qquad (2')$$

Il est facile de voir que la vaporisation totale a lieu à 100°. En effet le poids de vapeur remplissant à 100° l'espace donné est

$$\frac{0,622 \times 1,2936}{1,367} = 0^{gr},5886,$$

c'est-à-dire juste la masse d'eau qui se trouve dans l'enceinte.

Il y a donc lieu de considérer deux vitesses à 100°. Un peu avant 100°, à $100 - h$ on trouve en appliquant la formule (2) et prenant toujours pour unité la vitesse à 80° :

$$V_{100-h} = 1,196014.$$

C'est d'ailleurs le nombre donné par M. Lafolie. Un peu après la vaporisation totale, c'est-à-dire à $100 + h$ on obtient pour vitesse de refroidissement, en appliquant la formule (2') :

$$V_{100+h} = 1,3464$$

De même on a

$$\frac{V_{120}}{V_{100+h}} = \frac{5}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad V_{120} = 1,61661$$

et non 1,352793 comme l'avait trouvé M. Lafolie.

(Henri Niewenglowski.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École centrale (1890). — *(Fin.)*

16. — Rendre calculable par logarithmes la somme $\sin x + \sin 2x + \ldots \sin nx$.

17. — Construire la courbe $\rho = \dfrac{1}{\cos 2\omega + \sin 2\omega}$.

18. — Construire la courbe représentée par les équations

$$x = \frac{1-t}{1+t}, \qquad y = \frac{t}{1+t}.$$

19. — Inscrire dans une ellipse un parallélogramme de surface maxima.

20. — Construire la courbe $x^3 - 3x^2 + y = 0$, en discutant l'équation par rapport à x.

21. — Trouver les points qui ont même polaire par rapport à l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ et au cercle

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0.$$

22. — Si d'un point O d'une conique on mène deux cordes rectangulaires OA et OB, la droite AB passe par un point fixe, situé sur la normale en O. Généraliser en supposant que les deux cordes OA et OB soient parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique quelconque.

23. — En un point M d'une ellipse on mène la normale ME limitée en E au grand axe; on projette M en P sur ce grand axe, et par le point C où MP rencontre l'une des diagonales du rectangle construit sur les axes on abaisse une perpendiculaire sur ME, laquelle rencontre le grand axe en D. Démontrer que P est le milieu de ED.

24. — Par le point E de la question précédente on mène une perpendiculaire au grand axe sur laquelle on prend EP = EM. Lieu du point P.

25. — Construire la courbe $x^3 - y^3 - 3xy + 5x - 2y = 0$. Tangente à l'origine.

26. — L'orthocentre de tout triangle inscrit dans une hyperbole équilatère est situé sur la courbe.

27. — Lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée de la courbe $y = x^3$.

28. — Les normales à une hyperbole et à son asymptote en deux points situés sur une même perpendiculaire à l'axe transverse se rencontrent sur cet axe.

29. — Construire la courbe $y = \frac{(x-1)(x+5)}{3x-8}$. — Axes et foyers.

30. — Que représente l'équation $(x+y-1)^2 + (x-y-1)^2 - 1 = 0$? — Axes et sommets.

31. — Par le centre O d'une conique, on mène deux droites rectangulaires qui rencontrent la conique en A et B. Lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite AB. Généraliser en supposant le point O quelconque.

32. — Condition pour que trois plans donnés par leurs équations soient parallèles à une même droite.

33. — Trouver les équations des bissectrices des deux droites

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'}.$$

34. — On considère des sphères de rayon variable tangentes en un point donné à un plan donné. On demande le lieu des cercles de contact des cônes circonscrits à ces sphères et ayant pour sommet un point fixe du plan.

35. — Lieu des points dont la somme des carrés des distances aux quatre sommets d'un tétraèdre est constante.

36. — On fait tourner un plan autour d'une horizontale, de façon à le rendre horizontal; trouver les nouvelles projections d'un point lié à ce plan.

37. — On donne deux cercles tangents à la ligne de terre au même point (a, a'), et un point (s, s'). On considère un cône ayant pour sommet (s, s') et pour base l'un des cercles, et un cylindre ayant pour base l'autre cercle et pour direction de génératrices $(sa, s'a')$. Intersection des deux surfaces.

38. — Si deux hyperboloïdes de révolution ont leurs cercles de gorge dans un même plan, la projection de leur intersection sur ce plan est un cercle.

39. — Section plane d'un tore à axe vertical. Point le plus haut et le plus bas.

40. — Construire une sphère passant par deux points et tangente aux plans de projection.

41. — On donne deux plans par leur échelle de pente et les projections horizontales de deux courbes situées respectivement dans ces plans. Ces courbes sont les directrices de deux cônes dont on donne les sommets par leurs projections et leurs cotes. Trouver l'intersection de ces deux cônes.

CONCOURS DE 1891 *(Suite)*.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Épreuve définitive.

Epure.

104. — Intersection d'un cone et d'un cylindre. — On prendra pour ligne de terre le petit axe de la feuille. Le cône a pour base dans le plan horizontal une parabole ayant pour sommet le point α ($x = -4^{cm}$, $y = 8^{cm}$), pour foyer le point φ ($x = -3^{cm}$, $y = 8^{cm}$). Le sommet du cône est le point ss' ($x = -4^{cm}$, $y = 8^{cm}$, $z = 4^{cm}$).

Le cylindre a pour base dans le plan horizontal une autre parabole de sommet a ($x = 1^{cm}$, $y = 10^{cm}$) et pour foyer le point f ($x = 0$, $y = 10^{cm}$); la génératrice issue du sommet a passe par le point b ($x = -4^{cm}$, $y = 10^{cm}$, $z = 3^{cm}$).

Représenter le solide commun au cône et au cylindre en supposant les plans de projection transparents.

Indiquer à l'encre la construction pour obtenir un point, la tangente en ce point, et tous les points remarquables.

(23 juin, de 8 h. à midi.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques spéciales.

105. — Étant donnés un triangle ABC et deux points P et Q situés dans son plan, on considère les coniques S qui touchent le côté CA en A et passent par les points P et Q; on considère de même les coniques S′ qui touchent le côté CB en B et passent par les points P et Q.

1° Soient M et N les points d'intersection d'une conique S avec les droites CP et CQ; M′ et N′ les points d'intersection d'une conique S′ avec les mêmes droites. Démontrer que la droite MN passe par un point fixe A_1 et la droite M′N′ par un point fixe B_1, quand les coniques S et S′ varient.

2° En substituant le triangle CA_1B_1 au triangle CAB dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points A_2, B_2 et ainsi de suite; trouver l'équation de la droite A_nB_n et chercher sa position limite quand n devient infini.

3° On suppose que les coniques S et S′ varient de manière que les deuxièmes tangentes menées du point C à ces courbes soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites CP et CQ; trouver, dans cette hypothèse, le lieu du point d'intersection des polaires d'un point donné H par rapport à ces coniques.

4° Lorsque les coniques S et S′ varient en restant tangentes, trouver le lieu de leur point de contact.

CERTIFICAT D'APTITUDE A L'ENSEIGNEMENT SPÉCIAL (1re SESSION)

106. — Par un point P on mène aux asymptotes d'une hyperbole donnée des parallèles qui coupent la courbe en M et N.

1° Trouver l'équation de la droite MN. Quelle est sa direction, et que vaut le rapport des distances du point P à cette droite MN et à la polaire de P?

2° Trouver le lieu géométrique du point P pour que la droite MN passe par le centre de l'hyperbole.

3° On mène du centre la perpendiculaire OH sur la ligne MN. Quel est le lieu du point H, quand on fait varier l'angle des asymptotes en laissant fixes les sommets A et A′ de l'hyperbole?

4° Trouver le lieu du point P pour que la droite MN soit tangente à l'ellipse qui a les mêmes axes que l'hyperbole donnée, celle-ci étant invariable. — Construire la courbe ainsi obtenue, tracer ses asymptotes.

QUESTION PROPOSÉE

107. — Deux tores dont l'un a pour méridienne la section de l'autre par un plan bitangent, se coupent suivant deux cercles et, en outre, suivant une courbe plane dont le plan est perpendiculaire au plan des deux axes

A. Desprès.

Note. — La forme remarquable de l'équation du cercle de Joachimsthal que nous avons donnée dans le numéro précédent a été trouvée par MM. Laguerre et G. de Longchamps. (B. N.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

Paris. — Imp. Chaix. — 15062-7-91.

1re Année. N° 12. Septembre 1891.

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1891)

Mathématiques.

COPIE COURONNÉE : PRIX D'HONNEUR

97. — *On donne une surface du second ordre* Q *et une sphère de rayon nul* S, *ayant pour centre le point* P; *on considère toutes les surfaces* Σ *qui passent par l'intersection des deux premières.*

1° A étant un point de la surface Q, R *le plan tangent en ce point, on considère les cônes qui ont pour sommet le point* P *et pour directrices les sections faites dans les surfaces* Σ *par le plan* R. *Démontrer que la droite* PA *est un axe de tous ces cônes.*

2° Chercher combien il existe de cônes parmi les surfaces Σ. *Dans quel cas un des cônes trouvés devient un cylindre, un système de deux plans.*

3° Examiner si le point P *et la surface* Q *restant fixes, la propriété de l'énoncé subsiste quand on remplace la sphère* S *par une autre surface convenablement choisie.*

Soient $F(x, y, z, t) = 0$ l'équation de la surface Q, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ celle de la sphère S; l'équation générale des surfaces Σ sera $F(x, y, z, t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Toutes ces surfaces ont mêmes directions de plans cycliques et même plan polaire par rapport à l'origine. Ces conditions ne sont pas simples et se prêtent mal à une étude géométrique. Si au contraire nous considérons le faisceau corrélatif par dualité représenté par l'équation

$$F(u, v, w, s) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

(on peut le considérer comme polaire réciproque du précédent par rapport à la sphère imaginaire $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$); il se compose de toutes les surfaces homofocales à la surface $F(u, v, w, s) = 0$. Les propriétés des surfaces homofocales étant bien connues, il est naturel d'étudier ce faisceau de préférence au précédent et de substituer au problème proposé le problème corrélatif.

Remarquons d'abord que la proposition qu'il s'agit de démontrer en premier lieu, peut s'énoncer plus symétriquement de la façon suivante :

Étant donné un plan R quelconque, il existe trois des surfaces Σ tangentes à ce plan aux points M_1, M_2, M_3. Les trois droites PM_1, PM_2, PM_3 sont les trois axes du cône C qui a pour sommet le point P et pour directrice la section γ faite par le plan R dans une quelconque des surfaces Σ.

I. — Cherchons ce que devient cette proposition quand on transforme la figure par dualité. Aux surfaces Σ correspondent les surfaces Σ' d'un faisceau homofocal.

Aux points M_1, M_2, M_3 correspondent les plans tangents M'_1, M'_2, M'_3 aux trois surfaces du faisceau homofocal qui passent par le point R′ correspondant au plan R.

Au cône C qui a pour sommet l'origine $(s = 0)$ correspond la directrice C′ dans le plan de l'infini $(t = 0)$ du cône γ' de sommet R′ circonscrit à l'une quelconque des surfaces Σ'.

Les trois droites PM_1, PM_2, PM_3 étant des diamètres conjugués communs au cône C et au cône $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, les trois droites qui leur correspondent (traces des plans M'_1, M'_2, M'_3 sur le plan de l'infini) sont les côtés du triangle polaire conjugué commun à la conique C′ et à l'ombilicale

$u^2 + v^2 + w^2 = 0$. Les trois plans M'_1, M'_2, M'_3 diamétraux conjugués communs au cône γ' et au cône isotrope de même sommet sont les plans principaux du cône γ'.

On reconnaît le théorème de Otto Hesse :

« Tous les cônes circonscrits d'un point donné comme sommet aux surfaces d'un faisceau homofocal admettent mêmes plans principaux : ce sont les plans tangents aux trois surfaces du faisceau qui passent par ce point. »

II. — La recherche des cônes du faisceau

$$F(x, y, z, t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

se ramène évidemment à la recherche des coniques du faisceau $F(u, v, w, s) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$. Ces coniques sont au nombre de trois si l'on fait abstraction de l'ombilicale $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. Ce sont les focales de la surface Σ'. Deux d'entre elles sont réelles, l'autre est imaginaire. Elles sont situées dans les plans principaux de la surface $F(u, v, w, s) = 0$.

Les cônes du faisceau $F(x, y, z, t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ sont donc au nombre de trois (outre le cône isotrope $x^2 + y^2 + z^2 = 0$), parmi lesquels deux seulement sont réels, le troisième étant imaginaire, quoique ayant une équation réelle. Nous aurons les sommets de ces cônes en cherchant les points transformés des plans principaux de la surface Σ'. Un raisonnement analogue à celui qui a déjà été fait, montre que ce sont les trois points où les axes du cône ayant son sommet à l'origine et circonscrit à l'une des surfaces Σ percent le plan polaire H de l'origine par rapport à cette surface. En résolvant la question par le calcul, nous trouverons une autre définition de ces trois points.

Pour que l'un de ces cônes dégénère en cylindre, il suffit que l'un des points que nous venons de trouver soit rejeté à l'infini. Dans ce cas, le plan principal des surfaces Σ' qui lui correspond passe par l'origine de transformation. En raisonnant d'une autre façon nous allons arriver à une condition géométrique plus simple. Pour que par l'intersection des deux surfaces $F(x, y, z, t) = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ il passe un cylindre du second ordre, il faut et il suffit que ces deux surfaces aient un plan diamétral commun correspondant à une même direction de cordes conjuguées, c'est-à-dire, dans le cas présent, que le point P soit dans l'un des plans principaux de la surface $F(x, y, z, t) = 0$.

Pour que le faisceau $F(x, y, z, t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ contienne un système de deux plans, il faut et il suffit que le point P se trouve sur une des focales de la surface $F(x, y, z, t) = 0$.

La surface corrélative $F(u, v, w, s) = 0$ est alors de révolution; autour de l'axe focal si le point P est sur la focale de Q qui contient les ombilics réels; autour de l'autre axe si le point P est sur la focale qui contient les ombilics imaginaires (Focale modulaire).

III. — Cherchons maintenant si la propriété de l'énoncé subsiste quand le point P et la surface Q restant fixes, on substitue à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ une autre surface convenablement choisie.

Pour cela il suffit d'examiner si la proposition corrélative subsiste pour un faisceau tangentiel autre qu'un faisceau homofocal.

Soient Σ_1, Σ_2 deux surfaces du faisceau cherché; si nous considérons un point A quelconque de la surface Σ_1, la normale en A à cette surface est un axe de symétrie du cône circonscrit de A comme sommet à la surface Σ_2. La surface Σ_1 doit donc admettre en ce point même plan tangent que l'une des trois surfaces homofocales à Σ_2 qui y passent. En particulier, si nous considérons les points où les axes de Σ_2 percent Σ_1 la remarque précédente montre que les plans tangents en ces points à Σ_1 sont parallèles aux plans principaux de Σ_2 et que par suite les deux surfaces Σ_1 et Σ_2 sont concentriques et coaxiales. Si nous considérons de nouveau la surface homofocale à Σ_2 qui passe par le point A de Σ_1 et qui a même plan tangent en ce point, ces deux surfaces coïncident. Σ_1 et Σ_2 sont donc deux surfaces homofocales, et le faisceau $F(x, y, z, t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ est le seul qui jouisse de la propriété de l'énoncé.

La méthode de transformation que nous avons employée se prête donc très bien à la discussion du problème tout entier; mais sous la forme indiquée plus haut la proposition à démontrer apparaît comme un corollaire évident de la suivante : toutes les sections faites par un plan R dans les surfaces d'un faisceau $F + \lambda G = 0$ admettent un même triangle polaire conjugué commun dont les sommets sont les points de contact des trois surfaces du faisceau tangentes au plan R.

La démonstration de cette dernière proposition est immédiate. Il suffit de remarquer que toutes les sections précédentes sont circonscrites à un même quadrilatère et admettent par suite un même triangle polaire conjugué commun dont les sommets sont les centres des coniques évanouissantes du faisceau; ce sont bien les points que nous avons indiqués plus haut.

Dans le cas qui nous occupe, les trois points M_1, M_2, M_3 sont conjugués par rapport à la section γ et à la section faite par le plan R dans le cône $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Les trois droites PM_1, PM_2, PM_3 sont donc trois diamètres conjugués communs au cône C et au cône isotrope de même sommet; ce sont les axes du cône C.

Remarque. — Si nous transformons par polaires réciproques le théorème général indiqué plus haut, nous obtenons la proposition suivante, dont le théorème de Hesse n'est qu'un cas particulier :

Tous les cônes circonscrits d'un point donné comme sommet aux surfaces d'un faisceau tangentiel admettent un même système de trois plans diamétraux conjugués; ce sont les plans tangents aux trois surfaces du faisceau qui passent par ce point *.

Solution Analytique. — La surface Q et le point P étant donnés, cherchons quelle doit être la forme de l'équation d'une quadrique $\varphi(x, y, z, t) = 0$ pour qu'elle jouisse de la propriété de l'énoncé. Une surface passant par l'intersection de la surface Q et de la surface inconnue, a pour équation

$$f(x, y, z, t) + \lambda\varphi(x, y, z, t) = 0. \qquad (1)$$

Soient a, b, c, d les coordonnées homogènes d'un point quelconque A de la surface Q; en prenant le point P pour origine des coordonnées, l'équation du cône (C) s'obtiendra en éliminant la variable t entre l'équation précédente et l'équation

$$xf'_a + yf'_b + zf'_c + tf'_d = 0. \qquad (2)$$

Soit $\psi(x, y, z) = 0$ l'équation ainsi obtenue. On exprime que PA est un axe de symétrie en écrivant

$$\frac{\psi'_a}{a} = \frac{\psi'_b}{b} = \frac{\psi'_c}{c},$$

et ces équations doivent être vérifiées par tous les systèmes de valeurs de a, b, c, d vérifiant l'équation $f(a, b, c, d) = 0$.

Or on peut regarder l'équation (1) comme représentant le cône C pourvu que t soit regardé comme fonction de x, y, z déterminée par l'équation (2). On a donc

$$\psi'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x + (f'_t + \lambda\varphi'_t)\frac{dt}{dx}.$$

Mais l'équation (2) donne

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{f'_a}{f'_d};$$

en substituant, on a

$$\psi'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x - \frac{f'_a}{f'_d}(f'_t + \lambda\varphi'_t).$$

Par suite

$$\psi'_a = \lambda\left(\varphi'_a - \varphi'_d \cdot \frac{f'_a}{f'_d}\right).$$

et l'on aura pareillement ψ'_b et ψ'_c.

* Ici s'arrête la copie remise au Concours général; la solution par le calcul a été trouvée postérieurement.

On doit donc avoir
$$\frac{\varphi'_a - \varphi'_d \cdot \frac{f'_a}{f'_d}}{a} = \frac{\varphi'_b - \varphi'_d \cdot \frac{f'_b}{f'_d}}{b} = \frac{\varphi'_c - \varphi'_d \cdot \frac{f'_c}{f'_d}}{c}. \qquad (3)$$

Désignons par 2μ la valeur commune de ces rapports, de sorte que
$$\varphi'_a - \varphi'_d \frac{f'_a}{f'_d} = 2\mu a,$$
$$\varphi'_b - \varphi'_d \frac{f'_b}{f'_d} = 2\mu b,$$
$$\varphi'_c - \varphi'_d \frac{f'_c}{f'_d} = 2\mu c.$$

Ajoutons ces équations après avoir respectivement multiplié les deux membres de chacune par a, b, c; en tenant compte des relations
$$af'_a + bf'_b + cf'_c + df'_d = 0,$$
$$a\varphi'_a + b\varphi'_b + c\varphi'_c + d\varphi'_d = 2\varphi(a, b, c),$$
on obtient
$$\varphi(a, b, c, d) = \mu(a^2 + b^2 + c^2). \qquad (4)$$

La fonction $\varphi(x, y, z, t)$ est donc telle que si on y substitue les coordonnées d'un point quelconque de la surface représentée par l'équation $f(x, y, z, t) = 0$, elle se réduit à $\mu(a^2 + b^2 + c^2)$.

Donc l'équation $\varphi(x, y, z, t) = 0$ est de la forme
$$kf(x, y, z, t) + \mu(x^2 + y^2 + z^2) = 0\ *.$$

Réciproquement, toutes les surfaces de cette forme jouissent de la propriété énoncée.

Cônes du faisceau. — Leurs sommets sont donnés par les quatre équations
$$F'_x + \lambda x = 0, \qquad F'_y + \lambda y = 0, \qquad F'_z + \lambda z = 0, \qquad F'_t = 0,$$
compatibles seulement pour trois valeurs de λ. En remarquant que les trois premières équations définissent, quand λ varie, un lieu qui n'est autre que la cubique des normales relative au point P et à la surface $F(x, y, z, t) = 0$, nous pouvons définir les sommets des trois cônes comme intersection de cette cubique avec le plan polaire de l'origine par rapport à la surface $F(x, y, z, t) = 0$, $(F'_t = 0)$. Comme les directions asymptotiques de la cubique des normales sont les directions principales, il est facile de chercher la condition géométrique pour qu'un de ces cônes dégénère en cylindre.

Remarque. — Au début, nous avons dit que parmi les surfaces du faisceau $F(x, y, z, t) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ il y en avait trois tangentes à un plan donné R aux points M_1, M_2, M_3; soient Σ_1, Σ_2, Σ_3 ces trois surfaces. Nous avons démontré que tous les cônes tels que C admettaient pour axes de symétrie les trois droites PM_1, PM_2, PM_3. Tous ces cônes sont de plus homocycliques, les systèmes de plans cycliques étant déterminés par le point P et les sections faites par le plan R dans les surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, sections qui se composent de droites. Un seul de ces système est réel, et parmi les trois surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, il y en a toujours une et une seule à génératrices réelles.

Corrélativement, les cônes circonscrits d'un point donné comme sommet à un faisceau de surfaces homofocales sont homofocaux; en particulier les contours apparents de deux surfaces homofocales sur un même plan sont deux courbes homofocales (projection orthogonale); les deux focales réelles d'une même surface se projettent orthogonalement sur un plan quelconque suivant deux coniques homofocales.

Paul Jordan,
élève au Collège Stanislas.

* Voir la note ci-après.

Note. — La démonstration donnée plus haut a besoin d'être complétée.

Reprenons l'égalité $\varphi(a, b, c, d) = \mu(a^2 + b^2 + c^2)$;

il reste à prouver que μ est une constante. Par hypothèse on doit avoir

$$\varphi(x, y, z, t) = \mu(x^2 + y^2 + z^2) \tag{5}$$

pour toutes les valeurs de x, y, z, t vérifiant l'équation

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{6}$$

Regardons t comme une fonction de x, y, z définie par cette dernière équation. On a, en vertu de l'équation (6),

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_t}.$$

L'équation (5) donne $$\varphi'_x + \varphi'_t \frac{dt}{dx} = 2\mu x + x^2 \frac{d\mu}{dx}$$

ou $$\varphi'_x - \varphi'_t \frac{f'_x}{f'_t} = 2\mu x + x^2 \frac{d\mu}{dx};$$

mais en vertu des équations (3) on doit avoir

$$\varphi'_x - \varphi'_t \frac{f'_x}{f'_t} = 2\mu x,$$

donc $$\frac{d\mu}{dx} = 0.$$

On verrait de même que $\dfrac{d\mu}{dy} = 0$ et $\dfrac{d\mu}{dz} = 0$;

par conséquent μ est une constante.

Cela étant, la fonction $\varphi(x, y, z, t) - \mu(x^2 + y^2 + z^2)$

est nulle pour toutes les valeurs de x, y, z, t qui vérifient l'équation $f(x, y, z, t) = 0$. En d'autres termes la quadrique représentée par

$$\varphi(x, y, z, t) - \mu(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

passe par tous les points de la quadrique Q; donc elle se confond avec elle, et l'on a

$$\varphi(x, y, z, t) - \mu(x^2 + y^2 + z^2) \equiv \mathrm{K} f(x, y, z, t),$$

K étant une constante, ainsi que μ. Donc enfin l'équation cherchée est de la forme

$$\mathrm{K} f(x, y, z, t) + \mu(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

(B. N.)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

69. — *On donne une ellipse rapportée à ses axes :*

1° Trouver l'équation du système des tangentes menées à cette courbe par un point donné P. — *On prolonge ces tangentes* PM, PM′ *jusqu'à la rencontre de la directrice* DL *en* T *et* T′ *: trouver le lieu des positions du point* P *pour que le point* D *soit le milieu de* TT′. — *Expliquer géométriquement le résultat.*

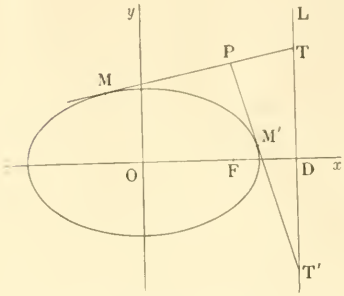
2° Lieu du point P *pour que l'angle* TFT′ *soit droit. — Montrer que ce lieu est une conique* C *qui a aussi pour foyer* F *et pour directrice* DL. — *Discuter cette conique.*

3° L'ellipse donnée ayant ses foyers fixes et la conique C *étant une hyperbole, trouver le lieu des projections du foyer* F *de toutes ces hyperboles sur leurs asymptotes.*

4° Trouver l'enveloppe de la conique C *quand l'ellipse donnée est variable, mais a ses foyers fixes.*

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1890, 1re session.)

1°. — L'équation du système des tangentes menées à l'ellipse définie par l'équation



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

par un point donné P (α, β), est

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)=0,$$

et en remplaçant dans cette équation x par $\frac{a^2}{c}$, abscisse de la directrice DL, on aura l'équation aux ordonnées des points T et T'.

Cette équation s'écrit, en posant $H=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1$,

$$\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2}-H\right)+\frac{2\beta y(\alpha-c)}{b^2c}+\frac{(\alpha-c)^2-Hb^2}{c^2}=0. \quad (1)$$

Le point D sera le milieu de TT' si cette équation a ses racines égales et de signe contraire, c'est-à-dire si

$$\beta(\alpha-c)=0;$$

par suite le lieu du point P se compose de l'axe des x, solution évidente, et de la droite menée par le foyer F perpendiculairement à l'axe focal.

2° — Si y' et y'' sont les racines de l'équation (1), les coefficients angulaires des droites FT et FT' sont

$$\frac{y'}{\frac{a^2}{c}-c} \quad \text{et} \quad \frac{y''}{\frac{a^2}{c}-c} \quad \text{ou} \quad \frac{cy'}{b^2} \quad \text{et} \quad \frac{cy''}{b^2};$$

ces deux droites seront perpendiculaires si $\frac{c^2y'y''}{b^4}=-1$, ou, en tenant compte de l'équation (1),

$$2b^2H-(\alpha-c)^2-\beta^2=0;$$

C'est l'équation du lieu demandé.

On sait que l'on a l'identité

$$b^2H\equiv(\alpha-c)^2+\beta^2-\frac{c^2}{a^2}\left(\alpha-\frac{a^2}{c}\right)^2;$$

l'équation devient

$$(\alpha-c)^2+\beta^2-\frac{2c^2}{a^2}\left(\alpha-\frac{a^2}{c}\right)^2=0,$$

et nous voyons ainsi que le lieu est une conique ayant pour foyer le point F, pour directrice correspondante la droite DL, l'excentricité étant $\frac{c}{a}\sqrt{2}$.

On en déduit aisément le genre de cette conique.

3° — Transportons l'origine des coordonnées au foyer F; l'équation de cette conique devient

$$x^2+y^2=\frac{2c^2}{a^2}\left(x+c-\frac{a^2}{c}\right)^2; \quad (2)$$

les perpendiculaires aux asymptotes menées par le point F ont pour équation

$$y^2+x^2=\frac{2c^2}{a^2}y^2. \quad (3)$$

Ces droites rencontrent les asymptotes sur la directrice; on aura donc le lieu des projections du foyer sur les asymptotes en éliminant a^2 entre l'équation (3) et celle de la directrice

$$x+c-\frac{a^2}{c}=0.$$

On obtient ainsi $$x(x^2 + y^2) + c^2(x^2 - y^2) = 0,$$
équation d'une strophoïde droite, ayant pour point double le point F et pour sommet le point O.

4° — Pour avoir l'enveloppe de la conique (2), nous écrivons que l'équation (2) a une racine double en a^2. Cette équation peut s'écrire

$$2a^4 - a^2[x^2 + y^2 + 4c(x + c)] + 2c^2(x + c)^2 = 0;$$

elle aura une racine double si

$$[x^2 + y^2 + 4c(x + c)]^2 - 16c^2(x + c)^2 = 0$$

ou $$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 8cx + 8c^2) = 0.$$

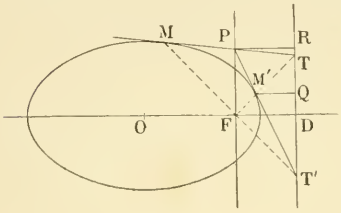
L'enveloppe se compose donc des droites isotropes issues du point F, ce qui était à prévoir, puisque ce point est foyer commun à toutes les coniques, et d'un cercle ayant son centre sur Ox.

J. Perrin, lycée de Besançon.

Ont résolu la même question : MM. G. Cuny (école Saint-Sigisbert, à Nancy); Delpierre (marine, Dieppe); Descombes (Annecy); P. Desmarest (Compiègne); F. Faure (Valence); Hallard (Bordeaux); E. Jacquest (lycée de Dijon); E. Jossinet (Troyes); A. Lecoquierre (lycée de Rouen); Munier (surveillant général au collège de Dôle); Perrée (Condorcet); Vigneaux (lycée de Toulouse).

Solution géométrique. **1°** — Le point D étant le milieu de TT′, FT et FT′ sont également inclinées sur OF. Mais FM et FM′ sont respectivement perpendiculaires sur FT et FT′; donc FM et FM sont aussi également inclinées sur OF, et par suite la bissectrice FP de l'angle MFM′ est perpendiculaire sur OF. Le lieu du point P est donc la perpendiculaire menée par F sur OF.

2° — Si l'angle TFT′ est droit, il en est de même de l'angle MFM′; les points M, F, T′ sont en ligne droite et l'angle PFT′ est égal à 135°. Menons PR et M′Q perpendiculaires sur la directrice; on a les égalités



$$\frac{M'Q}{PR} = \frac{T'M'}{T'P} = \frac{\text{surface } M'FT'}{\text{surface } PFT'} = \frac{FM' \times FT' \sin 90^\circ}{FP \times FT' \sin 135^\circ} = \frac{FM'}{FP}\sqrt{2},$$

d'où l'on déduit $$\frac{FP}{PR} = \frac{FM'}{M'Q}\sqrt{2}.$$

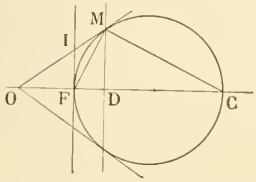
Le lieu du point P est une conique ayant pour foyer le point F, pour directrice la droite DL et pour excentricité celle de la conique donnée multipliée par $\sqrt{2}$.

3° — Nous nous appuierons sur ce que dans une conique à centre le rapport des distances du centre au foyer et à la directrice correspondante est égal au carré de l'excentricité.

Soit C le centre de l'hyperbole ayant pour foyer F, pour directrice DL et pour excentricité l'excentricité de l'ellipse donnée multipliée par $\sqrt{2}$. Dès lors, en vertu de la remarque, on a

$$\frac{CF}{CD} = 2\,\frac{OF}{OD}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{CF}{CD} : \frac{OF}{OD} = 2.$$

L'un des rapports anharmoniques des quatre points O, F, D, C étant égal à 2, ces points sont en proportion harmonique et les deux points O et D sont conjugués harmoniques des points F et C.



Décrivons un cercle sur FC comme diamètre qui coupe en M la directrice; CM est une asymptote de l'hyperbole, FM la perpendiculaire issue du foyer à cette droite, donc M est un point du lieu. Mais OM est tangente en M à ce cercle, puisque D est conjugué harmonique de O par rapport à F et à C; cette droite OM rencontre en I la tangente en F au cercle; on a donc IF = IM, le lieu du point M est donc une strophoïde droite ayant le point O pour sommet et le point F pour point double.

Il semble d'après la construction que les branches infinies de la strophoïde issues du point F constituent seules le lieu. Il est aisé de voir que la boucle correspond au cas où la conique donnée est une hyperbole, c'est-à-dire au cas ou le point D se trouve entre le point O et le point F.

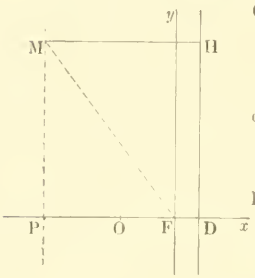
4° — Considérons deux ellipses voisines ayant pour centre le point O, pour foyer le point F et pour directrices les droites DL et D'L'. Désigons par a et a' $(a < a')$ les demi-grands axes. A ces deux ellipses correspondent deux coniques Cd'excentricité $\frac{c}{a}\sqrt{2}$ et $\frac{c}{a'}\sqrt{2}$. Nous cherchons l'enveloppe de ces coniques. Pour cela soit M_1 un point commun à ces deux coniques; abaissons M_1H_1 et M_1H_1' perpendiculaires sur les directrices; on aura

$$\frac{M_1F}{M_1H_1} = \frac{c}{a}\sqrt{2}, \qquad \frac{M_1F}{M_1H_1'} = \frac{c}{a'}\sqrt{2},$$

d'où

$$\frac{M_1H_1}{M_1H_1'} = \frac{a}{a'}.$$

Cela montre que M_1H_1 est plus petit que M_1H_1', c'est-à-dire que le point M_1 est à gauche de DL.



On déduit de la même égalité

$$\frac{M_1H_1}{a} = \frac{M_1H_1'}{a'} = \frac{DD'}{a'-a} = \frac{a+a'}{c},$$

d'où

$$M_1H_1 = \frac{a(a+a')}{c}.$$

Supposons que a' tende vers a; le point M_1 tend vers une position limite M sur la conique d'excentricité $\frac{c}{a}\sqrt{2}$, telle que l'on ait

$$MH = \frac{2a^2}{c}.$$

On en déduit $MF = 2a\sqrt{2}$, ce qui définit la position du point M. Le lieu de ce point est l'enveloppe cherchée.

On a

$$\overline{MP}^2 = \overline{MF}^2 - \overline{PF}^2$$

$$\overline{MP}^2 = 8a^2 - \left(\frac{a^2}{c} + c\right)^2;$$

en désignant par x et y les coordonnées du point M par rapport aux axes Fx et Fy

$$MP = y, \qquad x = -\left(\frac{a^2}{c} + c\right),$$

on obtient

$$y^2 = -8c(x+c) - x^2$$

ou

$$x^2 + y^2 + 8c(x+c) = 0,$$

qui est un cercle facile à construire.

J. Richard, professeur au lycée de Tours.

M. Tritay, élève au lycée de Douai, a envoyé une solution analytique, et une solution géométrique analogue à la précédente.

---

70. — *Deux droites passent respectivement par les points fixes* A *et* B, *et interceptent une longueur donnée* h *sur l'axe* $y'y$.

1° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre M *de ces droites.*

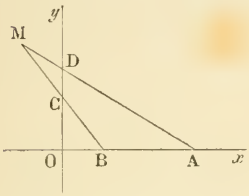
2° Cette courbe C *passe par* A *et* B, *on mène les tangentes en* A *et* B *qui se coupent en* P; *lieu de ce point* P *quand on fait varier* h.

3° Si le point B *reste fixe et si le point* A *se déplace sur* x'x , *la longueur* h *étant constante, quelle ligne décriront les points de la courbe* C *pour lesquels la tangente est parallèle à* AB ?

4° Trouver le lieu des foyers de cette nouvelle courbe, quand on fait varier h . — *Construire et indiquer la disposition particulière des lignes dont se compose ce dernier lieu.*

(Certificat d'aptitude à l'enseignement spécial, 1890, 2e session.)

1° Soient a et b les abscisses des points A et B ; si λ est l'ordonnée de C , celle de D sera $\lambda + h$, et les équations des deux droites BC et AD seront respectivement



$$\frac{x}{b} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda + h} - 1 = 0.$$

Éliminant λ entre ces deux équations, on a l'équation du lieu, qui se met aisément sous la forme

$$(a - b)xy + h(x - a)(x - b) = 0,$$

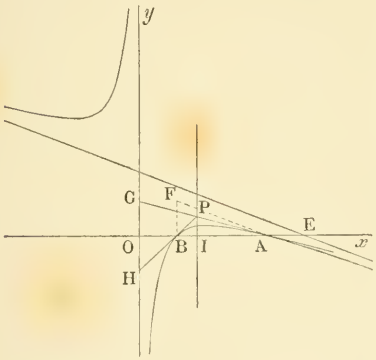
ou, en développant,

$$hx^2 + (a - b)xy - h(a + b)x + hab = 0.$$

Sous la première forme, on voit que le lieu est une conique qui est circonscrite au quadrilatère formé par les droites menées par A et B parallèlement à Oy et par les axes de coordonnées. Cela nous montre que la courbe C passe par les points A et B et admet pour asymptote Oy. La deuxième asymptote a pour équation

$$hx + (a - b)y - h(a + b) = 0;$$

elle coupe Ox au point E , symétrique de O par rapport au milieu de AB , et est parallèle à la droite joignant le point A au point F d'abscisse b et d'ordonnée h.



Nous conformant à la figure qui accompagnait le texte, nous avons supposé que la longueur h était portée à partir du point C vers les y positifs; mais, d'après l'énoncé, on doit aussi porter cette longueur h dans le sens des y négatifs; cela revient à changer h en $-h$ dans les calculs qui précèdent, on obtiendra comme lieu une seconde hyperbole, symétrique de la première par rapport à Ox .

2° Le pôle de la droite AB , ou de l'axe des x , par rapport à la conique C est déterminé par les deux équations

$$f'_x \equiv 2hx + (a - b)y - h(a + b) = 0,$$
$$f'_y \equiv h[- (a + b)x + 2ab] = 0,$$

qui nous montrent que quand h varie, le point P décrit la droite $x = \dfrac{2ab}{a + b}$, qui est perpendiculaire à Ox au point I conjugué harmonique de O par rapport à A et B.

Remarque. — On voyait très simplement que le lieu du point M était une conique passant par A et B , puisque les deux droites BC et AD engendrent deux faisceaux homographiques. Cette conique est une hyperbole, car on a des points à l'infini dans la direction de l'axe Oy et dans la direction AF , puisque, lorsque AD passe par le point F , BC est parallèle à AF. On a aisément les tangentes en A et B en cherchant dans chaque faisceau le rayon homologue de AB. Il suffit de prendre de part et d'autre du point O sur Oy les longueurs $OG = OH = h$; AG et BH sont les tangentes.

Projetons le point P, intersection de ces deux tangentes, en I sur Ox ; on a

$$\frac{IP}{h} = \frac{IA}{a} = \frac{IB}{b},$$

ce qui montre que le point I est le point conjugué harmonique de O par rapport à A et B. Le lieu du point P est donc la droite IP. De plus cette droite IP est la polaire du point O, ce qui montre que Oy est asymptote de la courbe C.

3° On aura le lieu des points de la courbe C où la tangente est parallèle à Ox, en éliminant a entre l'équation de la courbe

$$f(xy) \equiv hx^2 + (a - b)xy - h(a + b)x + hab = 0$$

et celle du diamètre conjugué de Ox

$$f'_x \equiv 2hx + (a - b)y - h(a + b) = 0.$$

Retranchons membre à membre, après avoir multiplié la deuxième par x ; il vient

$$x^2 = ab, \qquad (1)$$

d'où l'on tire $a = \frac{x^2}{b}$, et remplaçant dans la deuxième, il vient

$$(x - b)[(x + b)y - h(x - b)] = 0.$$

Le facteur $x - b$ donne une solution singulière, car si on fait $x = b$ dans l'équation (1), la valeur du paramètre a devient égale à b, et l'équation de la conique se réduit à $(x - b)^2 = 0$.

Le lieu est donc une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont les droites $x + b = 0$ et $y - h = 0$, et qui passe par le point $(b, 0)$ et le point $(0, -h)$.

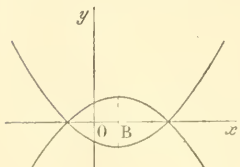
4° Les foyers de cette courbe sont déterminés par les équations

$$(y - h)^2 - (x + b)^2 = 0,$$

$$(y - h)(x + b) - 2(xy - hx + by + bh) = 0.$$

En éliminant h entre ces deux équations, on aura l'équation du lieu. De la première on tire

$$y - h = \pm (x + b) \qquad \text{ou} \qquad h = y \mp (x + b)$$



et remplaçant dans la deuxième qui peut s'écrire

$$(y - h)(x + b) + 2bh = 0,$$

on obtient $\pm 4by = (x + b)^2 - 4b(x + b)$

ou bien $(x - b)^2 - 4b(y + b) = 0,$

$$(x - b)^2 + 4b(y - b) = 0.$$

Ce sont les équations de deux paraboles égales, symétriques par rapport à Ox, ayant pour axe la droite $x = b$, pour sommets respectifs, les points $(b, -b)$ et (b, b) et dont le paramètre est égal à $2b$; elles sont par suite homofocales et ont pour foyer le point B.

A. Lecoquierre, lycée de Rouen.

Autres solutions par MM. Alfred Barriol, à Paris; G. Cuny, école Saint-Sigisbert, à Nancy; P. Décoreaux, lycée de Douai; A. Delpierre, collège de Dieppe; Descombes (Annecy); J. Dupuy (Bordeaux); F. Faure (Valence); E. Jacquest (lycée de Dijon); E. Jossinet (Troyes); Lemoult (la Roche-sur-Yon); Léon Mesnier, surveillant général au collège de Dôle; Henri Pellissier, lycée de Lyon; L. Perrée (Condorcet); J. Perrin, lycée de Besançon; A. Poulliart, lycée de Clermont.

PHYSIQUE

80. — *Un calorimètre de laiton pesant 500gr contient 2kg d'eau à la température initiale de 10°. Avec une vitesse constante, on fait tomber dans le calorimètre un filet d'eau à 80°, de façon que dans chaque minute le poids d'eau écoulée soit de 5gr. En supposant que le calorimètre ne subisse aucune perte de chaleur, quelle sera la température t° au bout de x secondes?*

On prendra 0,095 pour la chaleur spécifique du laiton.

Quelle est la courbe que l'on obtient, en portant les températures t° en ordonnées et les temps x en abscisses?

(Bourses de licence, 1890.)

Désignant par t_1, t_2, $t_3 \ldots t$ les températures de l'eau du calorimètre au bout de la première, de la seconde, de la troisième,... de la xme seconde, et remarquant que la valeur en eau du calorimètre est $0{,}095 \times 500 + 2000 = 47{,}500$, l'énoncé fournit facilement les équations suivantes :

$$47{,}500\,(t_1 - 10) = \frac{5}{60}\,(80 - t_1),$$

$$\left(47{,}500 + \frac{5}{60}\right)(t_2 - t_1) = \frac{5}{60}\,(80 - t_2),$$

$$\left(47{,}500 + \frac{2.5}{60}\right)(t_3 - t_2) = \frac{5}{60}\,(80 - t_3),$$

. . . . . .

$$\left(47{,}500 + (x-1)\frac{5}{60}\right)(t - t_{x-1}) = \frac{5}{60}(80 - t)$$

que l'on peut écrire

$$\left(47{,}500 + \frac{1}{12}\right) t_1 - 10 \times 47{,}500 = \frac{1}{12}\cdot 80,$$

$$\left(47{,}500 + 2.\frac{1}{12}\right) t_2 - \left(45{,}500 + \frac{1}{12}\right) t_1 = \frac{1}{12}\cdot 80,$$

$$\left(47{,}500 + 3.\frac{1}{12}\right) t_3 - \left(45{,}500 + 2.\frac{1}{12}\right) t_2 = \frac{1}{12}\cdot 80,$$

. . . . . .

$$\left(47{,}500 + x.\frac{1}{12}\right) t - \left[45{,}500 + (x-1)\frac{1}{12}\right] t_{x-1} = \frac{1}{12}\cdot 80,$$

d'où on tire, en ajoutant membre à membre :

$$-10 \times 47{,}500 + \left(47{,}500 + x\frac{1}{12}\right) t = \frac{1}{12}x\cdot 80,$$

ou, ordonnant et chassant le dénominateur 12 :

$$xt + 570t - 80x - 5700 = 0, \qquad (1)$$

ce qui montre qu'à chaque valeur de x correspond une seule valeur pour t, et de même à chaque valeur de t correspond une seule valeur pour x.

On a
$$t = \frac{80x + 5700}{x + 570},$$

valeur toujours acceptable. On voit que t ne pourra devenir égal à 80 qu'à la limite si on fait $x = \infty$,

ce qui était évident *a priori*. On le voit d'ailleurs facilement en construisant la courbe représentée par la relation (1), courbe qui est une hyperbole ayant pour asymptotes les parallèles aux axes menées par le point de coordonnées $(x = -570,\ t = 89)$ qui est le centre de la courbe.

La branche située dans l'angle des coordonnées positives correspond seule au phénomène physique.

(Henri NIEWENGLOWSKI.)

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

École normale supérieure (1891).

PHYSIQUE

Questions de M. Brillouin.

44. — Principe de Torricelli. — Pourquoi, dans un écoulement, l'eau se sépare-t-elle en gouttelettes?

45. — Sur un plateau d'une balance est une cuve C pleine d'un liquide de densité d; sur l'autre plateau est fixée une potence P qui soutient au moyen d'un fil un corps D, de poids p, qu'on peut à volonté immerger dans le liquide de la cuve. L'équilibre étant établi, le corps ne plongeant pas dans le liquide, que faudra-t-il faire pour le rétablir si on vient à plonger le corps dans le liquide?

46. — Détermination de la dilatation d'un gaz sous volume constant. Avec quelle précision devra-t-on mesurer les pressions pour avoir le coefficient de dilatation à $\frac{1}{100}$ près?

47. — Chauffant un certain liquide progressivement dans un vase clos, comment pourra-t-on reconnaître qu'on a dépassé le point critique?

48. — Lignes focales dans les miroirs sphériques.

49. — On donne deux droites lumineuses AB et A'B' en grandeur et en position. Trouver un miroir sphérique tel que l'une soit l'image de l'autre par rapport à ce miroir. Cas où les points A et A', B et B' doivent se correspondre.

50. — Vision à travers une surface plane. — Étant donnée une ligne droite dans une cuve pleine d'eau, quelle forme aura son image pour un œil situé hors de l'eau? Construire l'image par points dans le cas où la droite est perpendiculaire et dans le cas où elle est parallèle à la surface libre de l'eau.

51. — Sachant que dans un système optique centré on a $f_1 = -f_2$ quand les milieux extrêmes sont identiques, démontrer qu'on a $\frac{f_1}{f_2} = -\frac{n_1}{n_2}$ quand les milieux extrêmes sont différents et ont n_1 et n_2 pour indices absolus de réfraction.

52. — Trouver les plans principaux d'une surface sphérique en les définissant comme les plans donnant un grossissement égal à $+1$.

53. — Plans principaux d'un système de deux lentilles ayant un foyer commun et mêmes distances focales principales.

54. — On considère deux sphères concentriques de rayons R et R'. L'intérieur est plein d'air; l'espace annulaire est en verre. Étudier la marche des rayons lumineux issus d'un point P situé en dehors de ce système; conditions d'émergence; étude des rayons remarquables. Cas particulier : $R' = 2R$.

55. — Clarté dans la lunette astronomique. Comment explique-t-on qu'on puisse voir les étoiles en plein jour?

56 à 58. — Voir les *Questions proposées* nos 115 à 117.

CONCOURS DE 1891 *(suite)*.

ÉCOLE CENTRALE

Première session.

Géométrie analytique.

108. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et, sur l'axe des x, un point A dont l'abscisse est a. On considère le faisceau des ellipses pour lesquelles le point O est un sommet d'axe non focal et la parallèle à l'axe des y menée par le point A une directrice.

I. — Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses du faisceau considéré passent par un point donné P est que ce point soit à l'intérieur du cercle qui a le point O pour centre et OA pour rayon.

II. — Démontrer que ce cercle a un double contact, réel ou imaginaire, avec chacune des ellipses du faisceau.

III. — Limiter les régions du plan dans lesquelles doit être situé un point P :

1° Pour qu'une seule des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel;

2° Pour que chacune des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel;

3° Pour qu'aucune des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point n'ait avec le cercle un double contact réel.

IV. — Lieu des pieds des normales menées par le point O à toutes les ellipses du faisceau.

(23 juillet, de 7 h. à 11 h.)

Calcul trigonométrique.

1° Calculer les angles d'un triangle isocèle dont la base et la hauteur sont dans le rapport de 1 à 0,65243724;

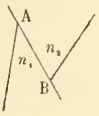
2° Calculer la base et la surface de ce triangle sachant que le rayon du cercle circonscrit est de $35275^{m},17$.

(23 juillet, de 2 h. 1/2 à 4 h.)

Physique et Chimie.

I. — Une pompe aspirante et foulante, de capacité C, est reliée, par le tube d'aspiration, à un réservoir de volume A contenant un gaz sous pression H_0, et, par le tube de refoulement, à un réservoir de capacité B contenant le même gaz sous pression P_0. Le piston est au début au bas de sa course et la machine ne possède pas d'espace nuisible.

Calculer les pressions successives : $H_1, H_2 \ldots H_n$, $P_1, P_2 \ldots P_n$, dans les deux récipients lorsqu'on fait fonctionner la pompe.



II. — Deux prismes A et B, d'indices n_1 et n_2, dont les arêtes sont parallèles et opposées, se touchent par une face.

Écrire, *sans démonstration*, les équations qui règlent la marche à travers cet appareil d'un rayon lumineux simple, situé dans un plan perpendiculaire aux arêtes.

A quoi se réduisent ces équations si le rayon incident et le rayon émergent sont, respectivement, perpendiculaires aux faces d'entrée et de sortie?

III. — Comme établit-on par synthèse la composition des gaz suivants : Acide chlorhydrique, acide sulfureux, acide carbonique?

Dire si la composition de ces gaz répond aux lois de Gay-Lussac.

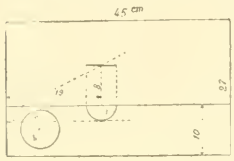
IV. — On prend dans l'eudiomètre 100^{cc} d'un mélange d'oxyde de carbone et d'hydrogène. On y ajoute 50^{cc} d'oxygène pur et on fait détoner. Il se dépose de l'eau sur les parois de l'eudiomètre et il reste 50^{cc} de gaz acide carbonique pur.

Quelles sont les proportions de gaz oxyde de carbone et de gaz hydrogène dans le mélange primitif?

(24 juillet, de 7 h. à 10 h.)

Géométrie descriptive.

109. — Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre, à $0^m,10$ du grand côté inférieur. Porter, sur cette ligne, à partir du petit côté gauche du cadre, $0^m,19$. Le point obtenu est la projection horizontale de l'axe vertical d'une surface gauche de révolution. Le cercle de gorge, qui a $0^m,03$ de rayon, est projeté verticalement à $0^m,08$ au-dessus de la ligne de terre. La droite de front, qui engendre la surface gauche, est projetée en avant de la ligne de terre et a sa trace horizontale à $0^m,03$ du petit côté gauche du cadre, de sorte que sa pente est $\frac{1}{2}$.



Par la trace horizontale de cette génératrice, on fait passer un cercle de $0^m,04$ de rayon, dont le centre est à $0^m,05$ en avant de la ligne de terre et est plus rapproché de l'axe de la surface gauche que ne l'est la trace horizontale de la génératrice. Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la génératrice de front donnée de la surface gauche de révolution.

Représenter, par ses projections et ses contours apparents, la portion du cylindre, supposé plein et opaque, comprise entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal situé à $0^m,16$ au-dessus de celui-ci, et extérieure à la surface gauche.

L'extérieur de la surface gauche est la portion de l'espace où n'est pas situé l'axe de révolution. On n'indiquera à l'encre rouge que les constructions nécessaires pour déterminer un point *quelconque* de la courbe d'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point, les points extrêmes, les points situés sur les contours apparents, les asymptotes.

On exposera succinctement, sur une feuille à part, le procédé suivi pour chacune des déterminations précédentes.

Titre extérieur : CYLINDRE LIMITÉ PAR UNE SURFACE GAUCHE.

Le titre, en lettres dessinées, est de rigueur. Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$.

(25 juillet, de 7 h. à 11 h.)

ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE

Géométrie analytique.

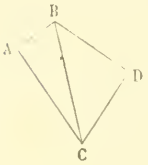
110. — A et B sont les foyers d'une ellipse fixe E. Une conique C ayant un de ses foyers au point A touche l'ellipse E et passe par le point B.

On demande de trouver par l'analyse et la géométrie :

1° Le lieu du second foyer de la conique C;

2° Le lieu des extrémités du grand axe de cette courbe.

(1er août. — Durée : 4 heures.)



Calcul trigonométrique.

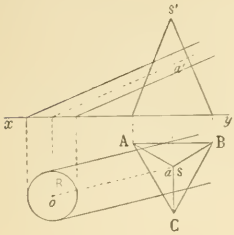
Calculer les côtés et les angles d'un quadrilatère inscriptible ABDC, connaissant

$AB = 25,6097$, $\widehat{ABC} = 67°22'48'',48$, $BC = 66,5853$, $\widehat{CBD} = 45°$.

Présenter les éléments du calcul.

(1er août. — 1 heure.)

Géométrie descriptive.



$Oa = 5R, \qquad s'a' = 2R, \qquad AB = 3R.$

Intersection d'un cylindre oblique à base circulaire avec une pyramide triangulaire droite dont l'axe rencontre celui du cylindre, et dont une face est parallèle à la ligne de terre.

Tracer les ellipses de section plane et déterminer en vraie grandeur celle de la face parallèle à la ligne de terre.

(3 août. — 3 heures.)

Physique et chimie.

I. — Nature et propagation du son. Lois des sons émis par les tuyaux sonores.

II. — Comparaison entre les propriétés des principaux composés du fer et du manganèse.

III. — Quel est le volume d'air nécessaire pour transformer par combustion un volume de protocarbure d'hydrogène en eau et acide carbonique?

(4 août. — 3 heures.)

QUESTIONS PROPOSÉES

111. — Si les côtés a, b, c d'un triangle ABC sont des nombres entiers et que $R, r, r_a, r_b, r_c, p, S$ désignent respectivement le rayon du cercle circonscrit, les rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits, le demi-périmètre et la surface du triangle, chacune des expressions

$$S^2(4R^2 + 20Rr - 2r^2 - p^2) - r^3(4R + r)^3$$

et

$$S^2[4R^2 - 20Rr_a - 2r_a^2 - (p-a)^2] + r_a^3(4R - r_a)^3$$

est nulle ou égale à un carré parfait.

(E. Lemoine.)

112. — En conservant les mêmes notations, démontrer que :

$$\Sigma a^2(a-b)(a-c)(a+b-2c)(a+c-2b) = 16S^2(R-2r)^2$$

et que si dans le premier membre développé, on change b en $-b$, c en $-c$, on trouve pour résultat $16S^2(R+2r_a)^2$.

(E. Lemoine.)

113. — Soit d le point où le cercle des neuf points du triangle ABC touche le cercle inscrit, d' le point où la tangente menée par d au cercle inscrit touche l'ellipse inscrite au triangle et dont le centre est le centre de gravité du triangle (ellipse inscrite de Steiner). Démontrer que l'on a :

$$dd' = -\frac{1}{2}\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab} = -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2(p^2-3r\delta)},$$

(δ désignant $4R + r$) et que si $2a = b + c$, cette tangente est parallèle à BC, distante de A du tiers de la hauteur partant de A et alors $dd' = \frac{1}{6}(c-b)$.

(E. Lemoine.)

114. — Étant donnée une courbe plane quelconque (C) rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point S dans son plan; on prend un point M sur (C) et l'on mène la tangente MT à cette courbe en M. Cette tangente coupe l'axe des x en T, que l'on joint à S; la droite ST coupe l'ordonnée de M au point N. On prend le point m, conjugué harmonique de N par rapport à M et à son symétrique M' par rapport à Ox. On demande le lieu de m quand M parcourt la courbe (C), ainsi que la tangente à ce lieu en chacun des points m.

(E. Jablonski.)

115. — Vase de Mariotte. L'écoulement est-il rigoureusement constant? Analyser ce qui se passe quand le tube étant fermé en bas, est ouvert sur le côté (en O). — Un certain volume de liquide s'étant écoulé, trouver le volume de la bulle d'air qui va se former.

[École normale, 1891. — *Examens oraux* (M. Brillouin).]

Fig. 115.

Fig. 116.

Fig. 117.

116. — Étant donnés deux vases communiquants cylindriques, de rayons très petits, situés à une distance r l'un de l'autre et renfermant deux liquides de densités d et d', on fait tourner le système autour de l'axe de l'un des vases AB, avec une vitesse angulaire uniforme ω. Que deviendront les niveaux du liquide dans les deux vases?

(Id.)

117. — Conditions d'équilibre des corps flottants. Application au ludion. Le ludion est supposé cylindrique et de la forme d'une éprouvette ouverte à la partie inférieure; de combien s'enfoncera le ludion quand on augmentera la pression de l'air situé à la partie supérieure d'un mètre d'eau? Au début l'éprouvette est supposée flotter, son fond étant situé sur la surface libre.

(Id.)

Le Rédacteur-Gérant : H. VUIBERT.

PARIS. — IMP. CHAIX. — 18110-8-91.

QA
1
R486
année 1

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY